## ØVING 6 hentet fra [Matson, 1996, s.150]

Denne øvingen er gjort og fremført av Hans Hansen og Nikolai S. Aasen, 12. mars 1996
Den ligger tilgjengelig på nettet: http://www.stud.ntnu.no/~nsaa/lf/

Definerer følgende variable:
S er kontinuerlig(antagelse) uniformt fordelt over intervallet (0,10)

$$S \sim U(0,10)$$

Tetthetsfunksjonen til en uniformt fordelt variabel er[Dougherty, 1991, s.97] eller [Berck,1992,32.11]

$$f_s(s) = \begin{cases} 1/10 & 0 \le s \le 10 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

Vi har at x = periodens inntekt til servicebedriften

$$x = g(s) = \begin{cases} 10 + 2s - a & s \le a \\ 10 + a & s > a \end{cases}$$

Vi definere videre:

$x_A$ = Agentens *virkelige inntekt* i perioden
$x_P$ = Prinsipalens *virkelige inntekt* i perioden

og at

$\mu^*$ = E(X) = forventet periodeinntekt til bedriften.

$x_A{}^*$ = $E[X_A]$= Agentens forventede inntekt i perioden

$x_P{}^*$ = $E[X_P]$= Prinsipalens forventede inntekt i perioden

$U_A$ = Agentens nyttefunksjon
$U_P$ = Prinsipalens nyttefunksjon

Fra statistikken vet vi at [Dougherty, 1991,s.112]

$$E(g(S)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f_s(s) ds$$

Vi vil klargjøre forskjellen på virkelig og forventet inntekt:
Forventet Inntekt: Agenten vet på forhånd hvor mye han vil få betalt, nemlig 40% av E[X]
Virkelig Inntekt: Agenten vet ikke på forhånd hvor stor inntekten vil bli, siden den er bestemt som 42% av virkelig inntekt.
Når Agenten får en prosentsats av forventet inntekt er man ikke utsatt for ikke-kontrollerbar risiko. Dermed er all denne risiko veltet over på Prinsipalen.





### *Oppgave 1*

Vi skal vise at agentens(A) rasjonelle beslutning er å maksimere uttrykket

$$\frac{1}{10}\left[\int_0^a (10 + 2s - a) ds + \int_a^{10} (10 + a) ds\right]$$

A ønsker å maksimere forventet nytte.Dvs

$$\text{Maks } E[U_A] = E[U_A(0.40 * E[X])] = E\left[\left(0.40 * \mu^*\right)^{1/2}\right]$$

Forventningsverdien av en konstant er en konstant

$$\text{Maks } E[U_A] = \sqrt{0.40 * \mu^*}$$

Agenten (A) vil nå maksimere forventet nytte ved å maksimere forventet inntekt $\mu^* = E[X]$

$$E(X) = E(g(S)) = \int_0^{10} g(s) f_s(s) ds$$

Setter inn tetthetsfunksjonen $f_s(s) = 1/10$ for S

$$= \int_0^{10} g(s) \frac{1}{10} ds$$

Deler opp integralet, og setter inn for g(s)

$$= \int_0^a (10 + 2s - a) \frac{1}{10} ds + \int_a^{10} (10 + a) \frac{1}{10} ds$$

Vi flytter 1/10 på utsiden, og vi har vist det vi skulle.

$$E[X(S)] = \frac{1}{10}\left[\int_0^a (10 + 2s - a) ds + \int_a^{10} (10 + a) ds\right]$$

### *Oppgave 2*

Vi må da maksimere forventet periodeinntekt til bedriften E(X)

Max

$$E(X) = \frac{1}{10}\left[\int_0^a (10+2s-a)ds + \int_a^{10}(10+a)ds\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left[10s+s^2-as\right]_0^a + \left[10s-as\right]_a^{10}\right]$$

$$= -\frac{a^2}{10} + a + 10$$

Mulige maksimum finner vi ved å derivere dette uttrykket mhp a, og setter det lik 0

$$\frac{dE(X)}{da} = -\frac{1}{5}a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^* = 5$$

Sjekker om dette er en maksverdi

$$\frac{d^2E(X)}{da^2} = -\frac{1}{5} \le 0$$

Siden dette er et maksimumspunkt, vil optimalt valg av a bli

$$\underline{a^* = 5}$$

Total forventet inntekt for bedriften blir ved a=5 lik

$$\mu^* = E(X|_{a=5}) = -\frac{5^2}{10} + 5 + 10 = 12.5$$

A skal ha 40% av forventet inntekt $x_A^* = E(X_A|_{a=5}) = E(0.4X|_{a=5}) = 0.4E(X|_{a=5}) = 0.4*12 = 5$

Forventet nytte til A blir da

$$E(U(x_A^*)) = E(\sqrt{5}) = \sqrt{5} = \underline{2.236}$$

### *Oppgave 3*

Forventet inntekt for P vil være total inntekt minus forventet inntekt betalt til A

$$\underline{x_P^*} = x - x_A^* = x - 0.4x = 0.6x = 0.6*12.5 = \underline{7.5}$$





### *Oppgave 4*

Prinsipalen vil få en inntekt som er lik bedriftens virkelige inntekt minus 40% av forventet inntekt

$$x_P = g_p(s) = x - 0.40*\mu^* = x - 0.40*12 = x - 5$$

$$= \begin{cases} 10+2s-a-5 & ,s \le a \\ 10+a-5 & ,s > a \end{cases} = \begin{cases} 10+2s-5-5 & \\ 10+5-5 & \end{cases} = \begin{cases} 2s & ,s \le 5 \\ 10 & ,s > 5 \end{cases}$$

Prinsipalens forventede nytte blir da

$$E\left[U(g_p(s))\right] = \int_0^{10} f_s(s)U[g_p(s)]ds$$

$$= \frac{1}{10}\left[\int_0^5 \left(\sqrt{2s}\right)ds + \int_5^{10}\left(\sqrt{10}\right)ds\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left[\frac{2\sqrt{2}(s)^{3/2}}{3}\right]_0^5 + \left[\sqrt{10}s\right]_5^{10}\right]$$

$$= \underline{\frac{5\sqrt{10}}{6} = 2.635}$$

### *Oppgave 5*

Virkelig inntekt til A:

$$x_A = 0.42x$$

Vi må maksimere forventet nytte av 42% av *virkelig inntekt*

$$E\left[U_A(0.42x(s))\right] =$$

$$= \int_0^{10} f_s(s)U_A\left(0.42x(s)\right)ds$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^{10} U_A(0.42x(s))ds$$

$$= \frac{1}{10}\left[\int_0^a \left(\sqrt{0.42(10+2s-a)}\right)ds + \int_a^{10}\left(\sqrt{0.42(10+a)}\right)ds\right]$$

Hvilket skulle vises.

### *Oppgave 6*

Vi finner dette integralet:

$$E[U_A] = \frac{1}{10}\left[\int_0^a \left(\sqrt{0.42(10+2s-a)}\right)ds + \int_a^{10}\left(\sqrt{0.42(10+a)}\right)ds\right]$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{42}\left[(10-a)^{1.5} + 2(a-20)\sqrt{a+10}\right]}{300}\right)$$

Deriverer dette uttrykket mhp a, setter det lik 0, og får

$$\frac{dE[U_A]}{da} = \sqrt{a+10}\sqrt{10-a} - 2a = 0$$

Ved å prøve endel verdier fant vi at (HP'en er vår beste venn...)

| a= | $\sqrt{a+10}\sqrt{10-a} - 2a =$ |
|---|---|
| 4 | 1.16 |
| 4.5 | -0.0697 |
| 4.45 | 0.0553 |
| 4.4721359 | 0.00000013751 |

$$a = \underline{4.4721}$$

Dette er maksimumsverdien siden den dobbeltderiverte

$$\frac{d^2E[U_A]}{da^2} = -\frac{\sqrt{42}}{400\sqrt{10-a}} - \frac{\sqrt{42}(a+20)}{200(a+10)^{3/2}} \le 0$$

er negativ $(0 \le a \le 10)$

Maksimum nytte for A er (a=4.4721)

$$\underline{E[U_A]} = -\left(\frac{\sqrt{42}\left[(10-a)^{1.5} + 2(a-20)\sqrt{a+10}\right]}{300}\right) = \underline{2.27142}$$

Når A får 42% av virkelig inntekt vil P få følgende inntekt

$$x_P = g_p(s) = x - 0.42 * x = 0.58 * x$$

$$= \begin{cases} 10+2s-a-5 & ,s \le a \\ 10+a-5 & ,s > a \end{cases} = \begin{cases} 0.58*(10+2s-4.4721) \\ 0.58*(10+4.4721) \end{cases} = \begin{cases} 3.206182+1.16s & ,s \le 4.4721 \\ 8.393818 & ,s > 4.4721 \end{cases}$$

Maksimum nytte for P blir da($U_P = x^{1/2}$)

$$\underline{E[U_P]} = E\left[(x(s))^{1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\int_0^{4.4721} (3.206182+1.16s)^{1/2}ds + \int_{4.4721}^{10}(8.393818)^{1/2}ds\right]$$

$$\underline{=2.66923}$$





### *Oppgave 7*

Oppsummering:

Når begge parter er risikoaverse($U_A(x_A) = x_A^{1/2}$, og $U_P(x_P) = x_P^{1/2}$)

| | Kontraktsform 1: Agenten får 40 % av *forventet* inntekt | Kontraktsform 2: Agenten får 42% av *virkelig* inntekt |
|---|---|---|
| Forventet nytte for Agent $E[U_A]$ | $E[U_A] = 2.236$ | $E[U_A] = 2.271$ |
| Forventet nytte for Prinsipal $E[U_P]$ | $E[U_P] = 2.635$ | $E[U_P] = 2.669$ |

Som vi ser får begge parter øket sin egen nytte ved at kontraktsformen er slik at man deler risiko. I kontraktsform 1, får A en fast inntekt (40% av forventet inntekt), mens A i kontraktsform 2, får en større prosentandel av virkelig inntekt, men som innebærer en risiko på $(0.42)^2 Var(X)$. Med de gitte nyttefunksjone er de to ekstra prosentene tilstrekkelig for å kompensere for A's økte risiko. Samtidig reduseres P's risiko såpass mye at det oppveier den økte forventede utbetaling til A.

### *Referanser*


[Berck, 1992] Peter Berck og Knut Sydsæter, Matematisk formelsamling for økonomer, Universitetsforlaget, Oslo 1992

[Dougherty, 1990] Edward R. Dougherty, Probability and statistics for the Engineering, Computing and Physical Science, Prentice Hall, London 1990

[Matson, 1996] Einar Matson, Kompendium fag 92008 Bedriftsøkonomi 3, Institutt for økonomi NTH, Trondheim 1996