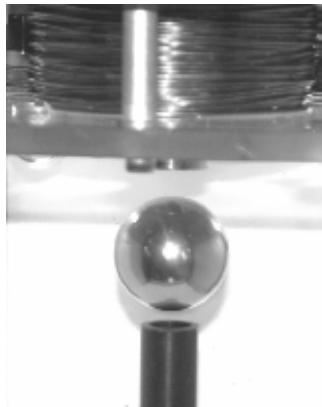


Magnetisk nivåregulering

Prosjektoppgave i
faget

TTK 4150 Ulineære systemer



Gruppe 4:
Rune Haugom
Pål-Jørgen Kyllesø
Jon Kåre Solås
Frode Efteland

Innholdsfortegnelse

Innholdsfortegnelse.....	2
Innledning	3
Oppgave 1 Matematisk modell	4
a) Tilstandsrom modell	4
b) Utled likevektspunkt :.....	4
Oppgave 2 Stabilitet.....	5
a) Jacobimatrisen A.....	5
b) Stabilitet i likevektspunktene.....	6
Oppgave 3 Regulator basert på lineære metoder	6
a) Blokdiagram for reguleringssystemet.....	6
b) Likning for egentlig regulator.....	7
c) Tilstandsrommodell for lukket-sløyfe system	7
d) Jacobimatrisen for lukket sløyfe-system i origo	8
e) Stabilitet i likevektspunkter	8
f) Simulering av lukket sløyfe-system	9
g) Praktisk regulering.....	10
h) Sammenligning teori/praksis	10
Oppgave 4 Faseplan.....	11
a) Lukket sløyfe strømdynamikk	11
b) Faseportrett av det åpen sløyfe-ulineære systemet	11
c) Egenverdier for den åpne reguleringssløyfen	12
d) Lukket sløyfe system med PD regulator:	12
e) Egenverdier for lukket sløyfe system med PD regulator.....	13
Oppgave 5 Beskrivende funksjoner metode	13
a) Transferfunksjon $G(s)$	13
b) Simulering med hystereseelement	15
c) Laboratorieforsøk.....	18
d) Beskrivende funksjon for backlashelementet	19
Oppgave 6 Inngang-Utgang linearisering.....	19
a) Definisjon.....	19
b) Vis at systemet har relativ grad $\rho = 3$ i $\{x \in R^3 \mid x_3 \neq 0\}$:	20
c) Lie-deriverte.....	20
d) Normalform og nulldynamikk	21
Oppgave 7 Regulator	22
a) Tilstandsrommodell	22
b) Utled et uttrykk for tilstandstilbakekoblingen $v = -K\zeta$	22
c) Finn K ved polplassering:	23
d) Simulering av modell.....	23
e) Anvendelse av regulator på systemet.....	25
Konklusjon.....	25

Innledning

Prosjektet Magnetisk nivåregulering er nyttet som en praktisk vinkling av faget TTK 4150. Systemet består av en stålkule som holdes svevende ved hjelp av magnetisk kraft. Den magnetiske kraften er generert av en spole der strømmen kan reguleres. For å holde ballen i en fast posisjon må magnetkraften tilsvare gravitasjonskraften som virker på kula. På grunn av mindre forstyrrelser må strømmen reguleres ved hjelp av en tilbakekobling av ballens posisjon. Posisjonen til kula er målt hvert 0,5 millisekund ved hjelp av en sensor som fastslår lysmengden som slipper ned i søyla under ballen. Ved hjelp av målingen er en ny referanse for strømmen fastsatt.

Systemet er ulineært da magnetkraften på kula er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden mellom kula og spolen og proporsjonal med kvadratet av strømmen gjennom spolen. Den åpne sløyfen er også meget ustabil da den magnetiske kraften fra spolen på kula vil avta når kulen fjerner seg mens strømmen er stabil. Dette vil igjen øke akselerasjonen nedover.

Reguleringsproblemene i prosjektet er basert på både konstant referanse, samt sinus- og firkantpulsfunksjoner. Lineære og ulineære kontrollsystemer er testet og sammenlignet, sammen med grensesykler.

Oppgave 1 Matematisk modell

a) Tilstandsrom modell

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \\x_2 &= x_1 = g - \frac{K_i}{m} \frac{i^2}{(x_1 + d)^2} = g - \frac{K_i}{m} \frac{x_3^2}{(x_1 + d)^2} \\x_3 &= -\frac{R_l + R_s}{L} x_3 + \frac{1}{L} u\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{K_i}{m} \frac{x^2}{(x_1 + d)^2} \\ -\frac{R_l + R_s}{L} x_3 + \frac{1}{L} u \end{bmatrix}$$

b) Utled likevektpunkt :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 = 0 \\&\Updownarrow \\x_2^* &= 0 \\x_2 &= x_1 = g - \frac{K_i}{m} \frac{x_3^{*2}}{(x_1^* + d)^2} = 0 \\&\Updownarrow \\x_1^* &= \sqrt{\frac{K_i}{mg}} x_3^* - d = \sqrt{\frac{K_i}{mg}} \frac{u^*}{R_l + R_s} - d \\x_3^* &= \sqrt{\frac{mg}{K_i}} (x_1^* - d) \\x_3 &= -\frac{R_l + R_s}{L} x_3^* + \frac{1}{L} u^* = 0 \\&\Updownarrow \\x_3^* &= \frac{1}{R_l + R_s} u^*\end{aligned}$$

Oppgave 2 Stabilitet

a) Jacobimatrisen A

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 \frac{k_i}{m} \frac{(x_1^*)^2}{(x_1^* + d)^3} & 0 & -2 \frac{k_i}{m} \frac{x_1^*}{(x_1^* + d)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R_L + R_S}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{bmatrix}$$

Finner koeffisientene ved å sette inn for x_1^* :

$$\begin{aligned} a_{21} &= 2 \frac{K_i}{m} \frac{\left(\sqrt{\frac{mg}{K_i}}(x_1^* + d)\right)^2}{(x_1^* + d)^3} = 2 \frac{K_i}{m} \frac{mg}{K_i} \frac{(x_1^* + d)^2}{(x_1^* + d)^3} = \underline{\underline{\frac{2g}{x_1^* + d}}} \\ a_{23} &= 2 \frac{K_i}{m} \frac{\sqrt{\frac{mg}{K_i}}(x_1^* + d)}{(x_1^* + d)^2} = 2 \frac{K_i}{m} \sqrt{\frac{mg}{K_i}} \frac{1}{(x_1^* + d)} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{gK_i}{m}} \frac{2}{(x_1^* + d)}}} \\ a_{33} &= \underline{\underline{\frac{R_L + R_S}{L}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2g}{x_1^* + d} & 0 & -\sqrt{\frac{gK_i}{m}} \frac{2}{(x_1^* + d)} \\ 0 & 0 & -\frac{R_L + R_S}{L} \end{bmatrix}$$

b) Stabilitet i likevektspunktene

$$\begin{aligned}
 \Delta(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = 0 \\
 &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda + a_{33} \end{bmatrix} = 0 \\
 &= \lambda^2(\lambda + a_{33}) - (\lambda + a_{33})(-\lambda + a_{21})(-1) = 0 \\
 &= (\lambda + a_{33})(\lambda^2 - a_{21}) = 0
 \end{aligned}$$

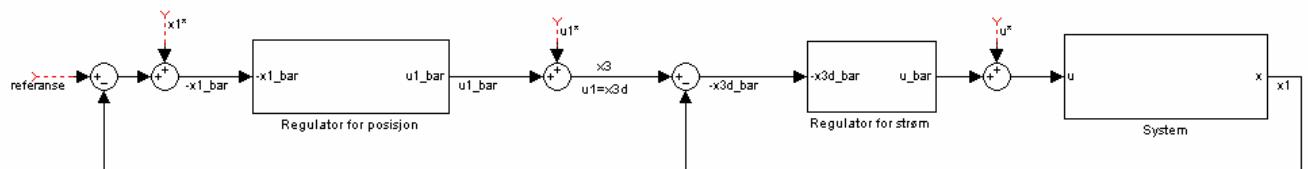
Systemets poler innsatt i likevektspunktene og parametrene er hentet fra initMaglev1:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -a_{33} = -\frac{R_L + R_S}{L} = -\frac{10+1}{0.4125} = \underline{\underline{-26.7}} \\
 \lambda_{2,3} &= \pm \sqrt{a_{21}} = \pm \sqrt{\frac{2g}{x_1^* + d}} \underset{x_1^* = 0.007}{=} \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81}{0.007 + 0.00785}} = \underline{\underline{\pm 36.3}}
 \end{aligned}$$

Dvs. at vi har en pol i høyre halvplan som gjør det åpne systemet ustabilt. Uten regulering har vi ingen praktisk stabile likevektspunkter.

Oppgave 3 Regulator basert på lineære metoder

a) Blokkdiagram for reguleringssystemet



Figur 3.1 Blokkdiagram for reguleringssystemet

u_1^* og u_1 representerer en PID-kontrollstruktur.

b) Likning for egentlig regulator

Skal vise at: $\bar{x}_{3d} = \bar{x}_3 + K_1 \bar{x}_1$

Definisjoner:

$$\bar{x}_3 = x_3 - x_3^*$$

$$\bar{u}_1 = u_1 - u_1^*$$

$$\bar{x}_{3d} = x_3 - x_{3d}$$

I tillegg har man: $x_{3d} = u_1$.

$$\bar{x}_{3d} = x_3 - x_{3d} = (\bar{x}_3 + x_3^*) - (\bar{u}_1 + u_1^*) = (\bar{x}_3 - \bar{u}_1) + (x_3^* - u_1^*)$$

Her vil den siste parentesen bli 0, og når man bruker at $\bar{u}_1 = -K_1 \bar{x}_1$ ender man med:

$$\bar{x}_{3d} = \bar{x}_3 - K_1 \bar{x}_1$$

som skulle vises.

$$\bar{u} = -k_3 \bar{x}_{3d} - k_5 \int \bar{x}_{3d} dt$$

Bruker resultatet $\bar{x}_{3d} = \bar{x}_3 - K_1 \bar{x}_1$

$$\bar{u} = -k_3(\bar{x}_3 + k_1 \bar{x}_1 + k_2 \dot{\bar{x}}_1 + k_4 \int \bar{x}_1 dt) - k_5 \int (\bar{x}_3 + k_1 \bar{x}_1 + k_2 \dot{\bar{x}}_1 + k_4 \int \bar{x}_1 dt) dt$$

$$\bar{u} = -k_3 \bar{x}_3 - k_3 K_1 \bar{x}_1 - k_5 \int \bar{x}_3 dt - k_5 k_1 \int \bar{x}_1 dt - k_5 k_2 \int \dot{\bar{x}}_1 dt - k_5 k_4 \int \int \bar{x}_1 dt dt$$

$$\bar{u} = -K_2 \bar{x}_2 - k_3 K_1 \bar{x}_1 - k_5 k_1 \bar{x}_4 - k_5 k_2 \bar{x}_1 - k_5 k_4 \bar{x}_6$$

$$\bar{u} = -k_3 K_1 \bar{x}_1 - K_2 \bar{x}_2 - k_1 k_5 \bar{x}_4 - k_2 k_5 \bar{x}_1 - k_4 k_5 \bar{x}_6$$

c) Tilstandsrommodell for lukket-sløyfe system

Har at $\mathbf{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{x}_3 \quad \bar{x}_4 \quad \bar{x}_5 \quad \bar{x}_6]^T$

Bruker at:

$$\bar{x}_3 = x_3 - x_3^*$$

$$\bar{u}_1 = u_1 - u_1^*$$

Som gir:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ g - \frac{K_i}{m} \frac{(\bar{u}_1 + u_1^*)^2}{(\bar{x}_1 + x_1^* + d)^2} \\ -a_{33} \bar{x}_3 + b \bar{u} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ g - \frac{K_i}{m} \frac{(\bar{u}_1 + u_1^*)^2}{(\bar{x}_1 + x_1^* + d)^2} \\ -a_{33} \bar{x}_3 + b(-k_3 K_1 \bar{x}_1 - K_2 \bar{x}_2 - k_1 k_5 \bar{x}_4 - k_2 k_5 \bar{x}_1 - k_4 k_5 \bar{x}_6) \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

d) Jacobimatrisen for lukket sløyfe-system i origo

Finner Jacobimatrisen for systemet i origo, dvs $\bar{A} = \frac{\partial \dot{\bar{x}}}{\partial \bar{x}}|_{\bar{x}_1=\bar{x}_3=0}$

$$\frac{\partial \dot{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2K_i}{m} \frac{(\bar{x}_3 + x_3^*)^2}{(\bar{x}_1 + x_1^* + d)^3} & 0 & \frac{-2K_i}{m} \frac{(\bar{x}_3 + x_3^*)}{(\bar{x}_1 + x_1^* + d)^2} & 0 & 0 & 0 \\ -bk_1k_3 - bk_2k_5 & -bk_2k_3 & -a_{33} - bk_3 & -bk_3k_4 - bk_1k_5 & -bk_5 & -bk_4k_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innsatt likevektspunktet origo gir Jacobimatrisen \bar{A} :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2K_i}{m} \frac{x_3^{*2}}{(x_1^* + d)^3} & 0 & \frac{-2K_i}{m} \frac{x_3^*}{(x_1^* + d)^2} & 0 & 0 & 0 \\ -bk_1k_3 - bk_2k_5 & -bk_2k_3 & -a_{33} - bk_3 & -bk_3k_4 - bk_1k_5 & -bk_5 & -bk_4k_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Stabilitet i likevektspunkter

Bruker Matlab og kjører filen initMaglev1.m og finner forsterkningene for $x_1^* = 7$ mm

$$k_1 = -118.5283$$

$$k_2 = -5.8966$$

$$k_3 = 88.0000$$

$$k_4 = -57.5837$$

$$k_5 = 2640$$

Finner egenverdiene til \bar{A} for likevektspunktene $x_1^* = \{3, 6.5, 7, 7.5, 11\}$ [mm] med de gitte forsterkningene regnet ut rett ovenfor.

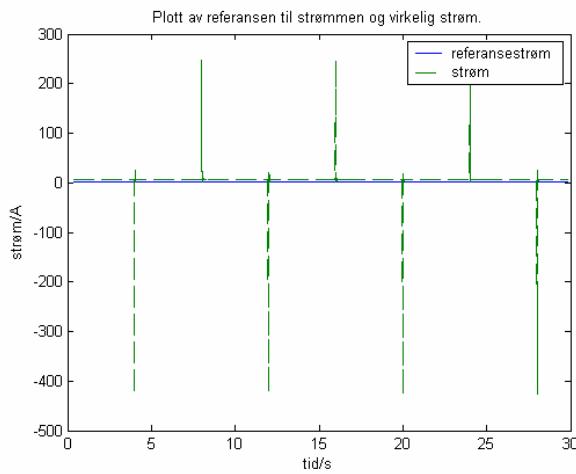
3 mm	6.5 mm	7 mm	7.5 mm	11 mm
-100.63 + 132.45i	-100.57 + 101.87i	-100.56 + 98.124i	-100.55 + 94.489i	-100.49 + 71.171i
-100.63 - 132.45i	-100.57 - 101.87i	-100.56 - 98.124i	-100.55 - 94.489i	-100.49 - 71.171i
-30.185	-30.14	-30.133	-30.126	-30.065
-6.9902	-7.1555	-7.1802	-7.2053	-7.3898
-1.5628	-1.5611	-1.5608	-1.5606	-1.5589
3.6711e-015	-4.4472e-015	-3.8928e-015	-3.5126e-016	-1.4621e-015

Tabell 3.1 1

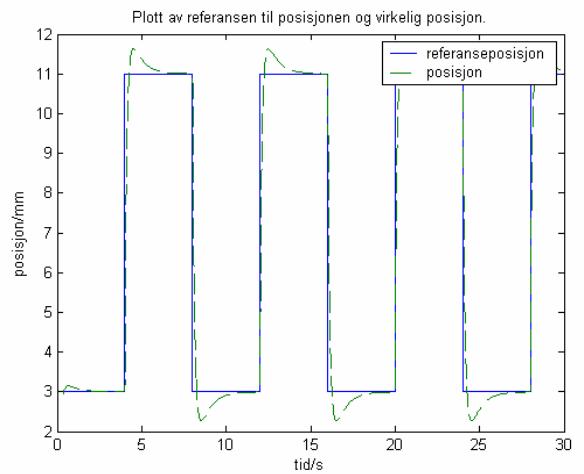
For likevektspunktet 3mm er det en egenverdi som har positiv realdel. Det betyr at punktet er ustabilt. For alle de andre likevektspunktene ligger realdelene < 0 , dvs likevektspunktene er stabile.

f) Simulering av lukket sløyfe-system

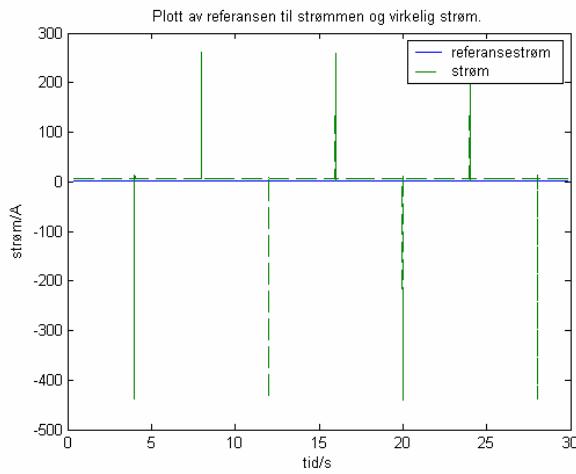
Bruker matlab for å plotte referanse for strømmen sammen med virkelig strøm og referansen for posisjon sammen med virkelig posisjon.



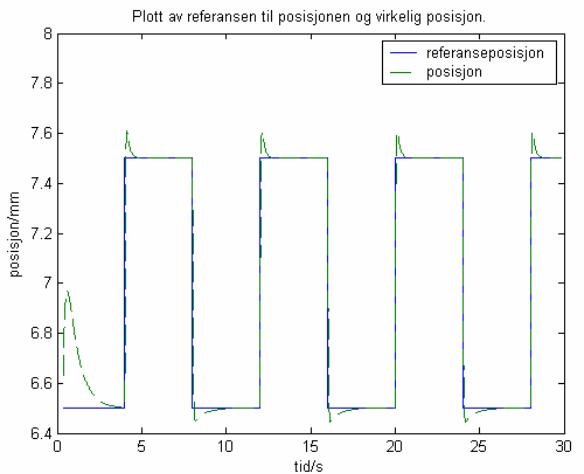
Figur 3.2 Simulering av reguleringssystemet med amplitude 4mm og arbeidspunkt 7mm.



Figur 3.3 Simulering av reguleringssystemet med amplitude 4 mm og arbeidspunkt 7mm.



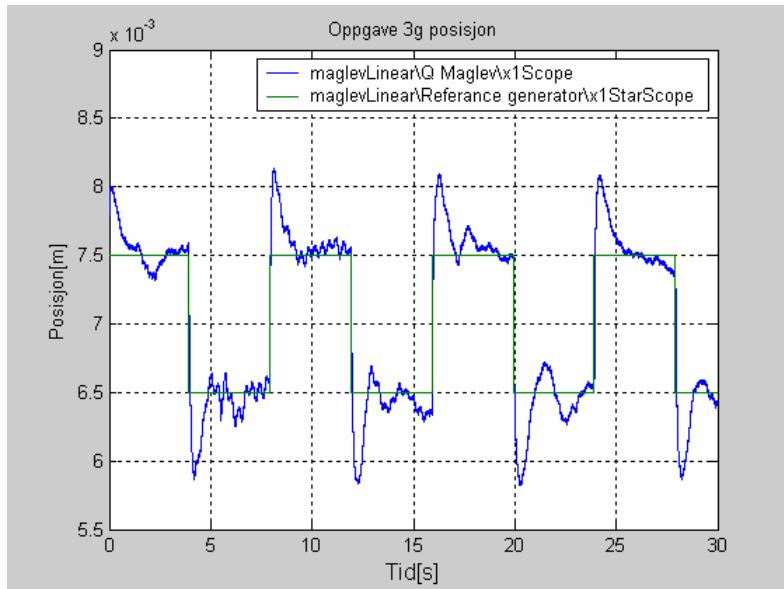
Figur 3.4 Simulering av reguleringssystemet med amplitude 0,5mm og arbeidspunkt 7mm.



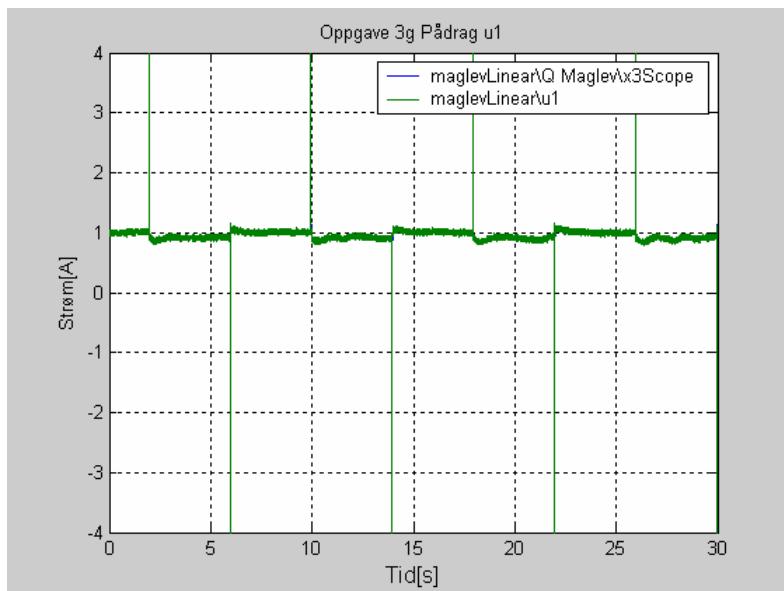
Figur 3.5 Simulering av reguleringssystemet med amplitude 0,5 mm

Man kan legge merke til at strømreguleringen er mye raskere enn posisjonsreguleringen.

g) Praktisk regulering



Figur 3.6 Generatoramplitude 0.5mm. Arbeidspunkt 7mm



Figur 3.7 Generatoramplitude 0.5mm. Arbeidspunkt 7mm

h) Sammenligning teori/praksis

For 0.5mm i amplitude på firkantpulsen, ble plottene for strøm og posisjon i det virkelige systemet nokså likt de samme plottene i simuleringen. Men det var en anelse mer oversving i det virkelige systemet, samt at det var litt swingninger på kurven noe som kan skyldes at kulen svinger sideveis. Økte man amplituden til 4mm var systemet stabilt under simuleringen, mens oversvinget ble for stort i det virkelige systemet til at reguleringen fungerte. (Kulen heftet seg til magneten).

Oppgave 4 Faseplan

a) Lukket sløyfe strømdynamikk

Det antas at lukket strøm sløyfe er uendelig rask i forhold til posisjonssløyfen. Lukket sløyfe strøm dynamikken kan derfor ignoreres under teoretisk analyse og simulering. Henviser til figur 3.2-3.5.

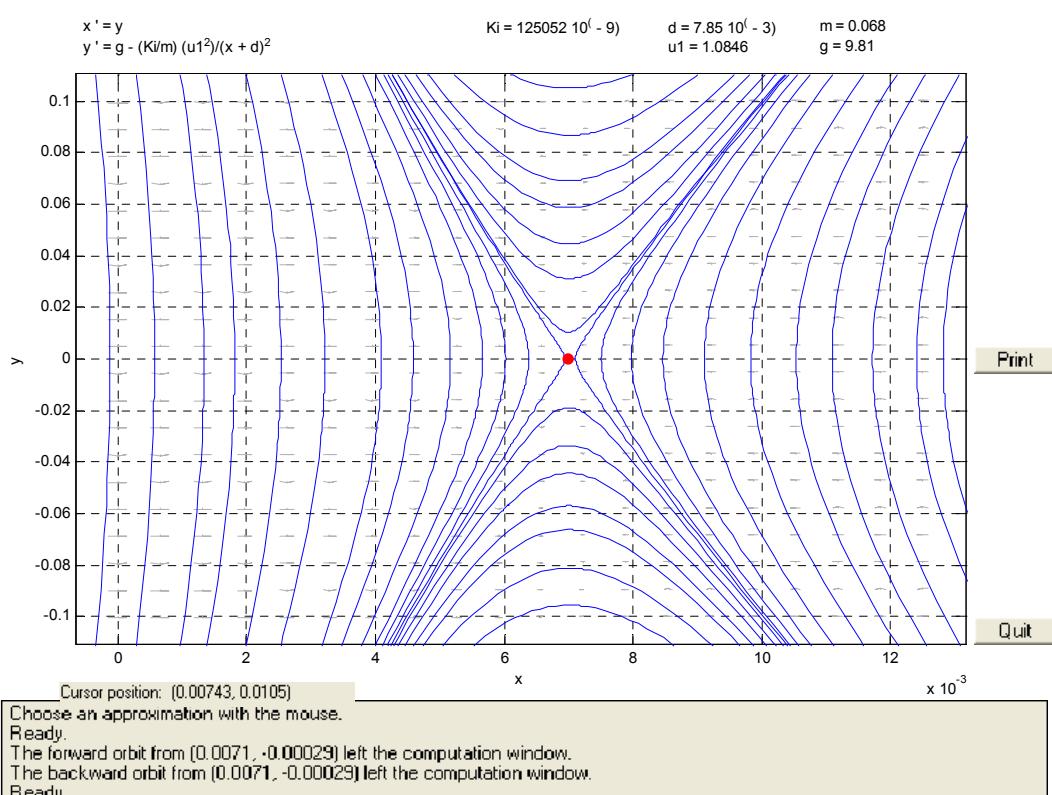
b) Faseportrett av det åpen sløyfe-ulineære systemet

Tilstandsrommodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{K_i}{m} \frac{u_1^2}{(x_1 + d)^2} \end{bmatrix}$$

Når $x_1^* = 7\text{mm}$, finnes u_1 ved likevekt slik: $x_3^* = u_1^* = \sqrt{\frac{mg}{K_i}}(x_1^* + d)$

Benytter pplane6 i matlab for å tegne faseportrett.



Figur 4.1 Faseportrett for åpen sløyfe

Faseportrettet viser at likevektspunktet er et sadelpunkt. Trajektorene går aldri inn til likevektspunktet. Systemet har en positiv og en negativ egenverdi, og er derfor ustabilt. Dette er naturlig ettersom det ikke er noen form for regulering på det ulineære systemet.

c) Egenverdier for den åpne reguleringsløyfen

Tilstandsrommodell:
$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{23} \end{bmatrix} \bar{u}_1,$$

$$a_{21} = \frac{2g}{(x_1^* + d)}, \quad a_{23} = \frac{2}{(x_1^* + d)} \sqrt{\frac{Ki \cdot g}{m}}$$

Finner systemets egenverdier vha matlab: $e_1 = 36.3485$, $e_2 = -36.3485$

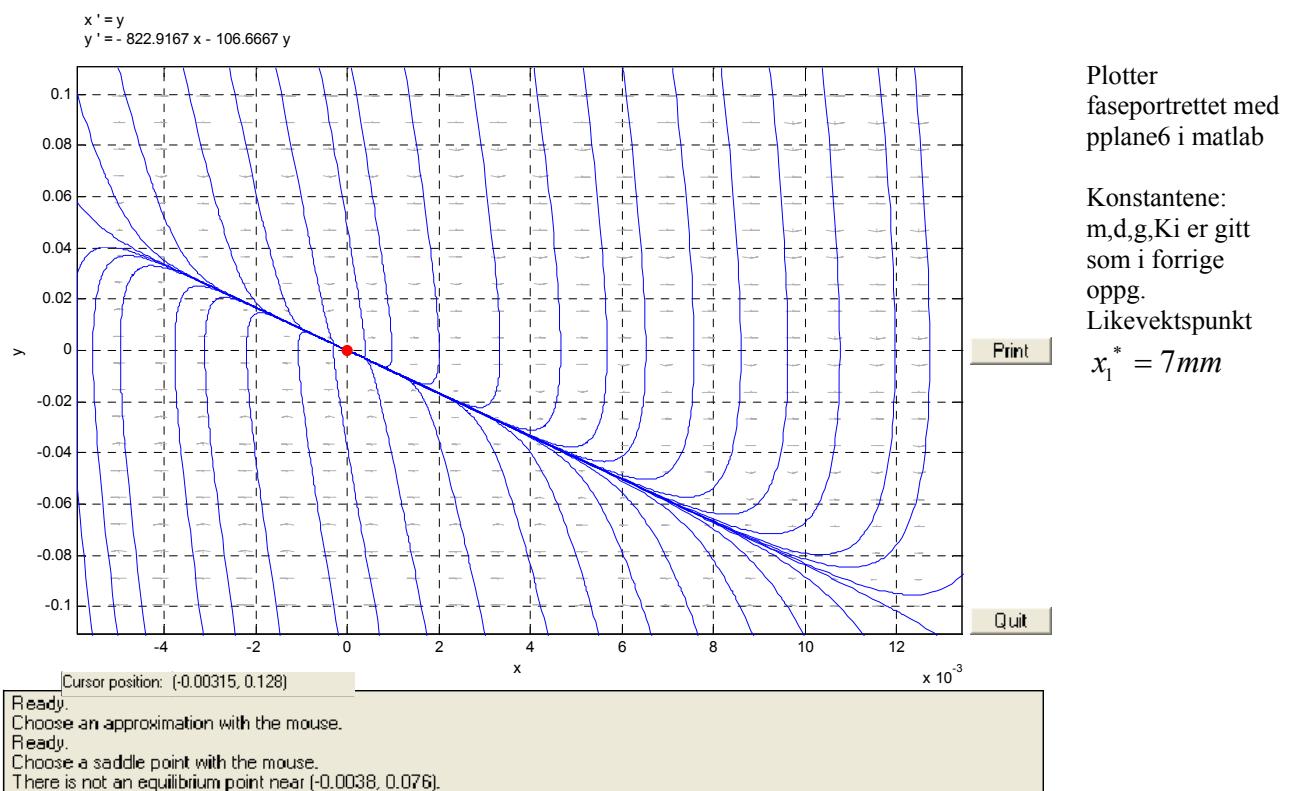
Som faseplananalysen viste er egenverdiene reelle med motsatt fortegn. Konstantene er gitt som i forrige oppave.

d) Lukket sløyfe system med PD regulator:

Tilstandsrommodell:
$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{23} \end{bmatrix} \bar{u}_1, \quad \bar{u}_1 = -k_1 \bar{x}_1 - k_2 \bar{x}_2 = -K \bar{x}_1$$

Setter inn for \bar{u}_1 i tilstandsrommodellen.

Tilstandsrommodellen blir dermed som følger, med ny systemmatrise (A-BK) :



Figur 4.2 Faseportrett for lukket sløyfe

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} - k_1 a_{23} & -k_2 a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Benytter kontrollgain $k_1 = -118.5283$ og $k_2 = -5.8966$ (fra initMaglev1)

$$\text{Regner ut } (A-BK) \text{ med matlab til å bli: } (A-BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -822.9167 & -106.6667 \end{bmatrix}$$

I praksis er x_1 begrenset mellom $[0, 12.5 \cdot 10^{-3}]$ m, men vi plottet negative verdier for å vise klart at likevektpunktet er en stabil node. Trajektorene går mot likevektpunktet og viser at likevektpunktet er en stabil node. Egenverdiene kan forventes å være reelle og ligge i venstre halvplan.

e) Egenverdier for lukket sløyfe system med PD regulator

Benytter matlab for å beregne egenverdiene. eig(A-BK) gir følgende egenverdier:

$$e1 = -8.3719, e2 = -98.2947$$

Egenverdiene er reelle og ligger i venstre halvplan. Dette var å forvente ettersom faseplananalysen viste at likevektpunktet var en stabil node.

Oppgave 5 Beskrivende funksjoners metode

a) Transferfunksjon G(s)

Det lineære systemet kan skrives

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= a_{21}\bar{x}_1 - a_{23}\bar{u}_1 \end{aligned}$$

Laplace-transformerer og eliminerer \bar{x}_2

$$\begin{aligned} s^2\bar{x}_1 &= a_{21}\bar{x}_1 - a_{23}\bar{u}_1 \\ g_p(s) &= \frac{\bar{x}_1}{\bar{u}_1} = -\frac{a_{23}}{s^2 - a_{21}} \end{aligned}$$

Transferfunksjonen for regulatoren blir den samme som transferfunksjonen fra avviket e til pådraget u_1 . Siden referansen er 0, vil avviket $e = -y = -x_1$

Regulatoren er gitt ved

$$\bar{u}_1 = -k_1\bar{x}_1 - k_2\dot{\bar{x}}_1 - k_4 \int \bar{x}_1 dt$$

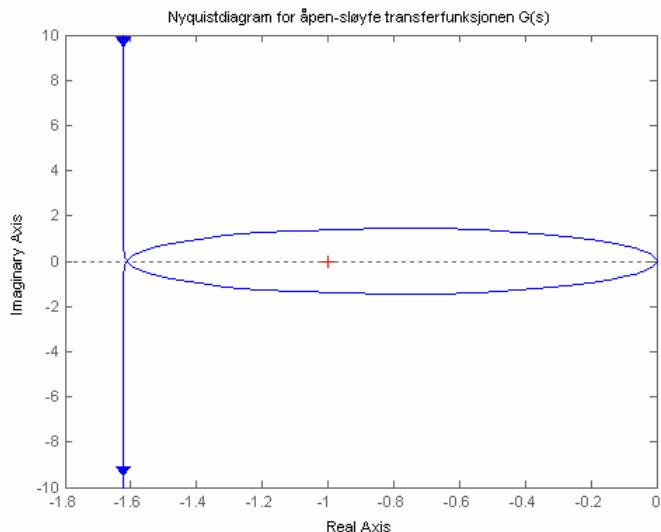
Laplace-transformerer og finner transferfunksjonen fra $-\bar{x}_1$ til \bar{u}_1

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= -k_1\bar{x}_1 - sk_2\bar{x}_1 - \frac{1}{s}k_4\bar{x}_1 \\ g_r(s) &= \frac{\bar{u}_1}{-\bar{x}_1} = k_1 + sk_2 + \frac{1}{s}k_4\end{aligned}$$

Utgangen $y = \bar{x}_1$. Så transferfunksjonen $G(s) = g_r(s) g_p(s)$ blir:

$$G(s) = g_r(s) \cdot g_p(s) = (k_1 + sk_2 + \frac{1}{s}k_4)(-\frac{a_{23}}{s^2 - a_{21}}) = -\frac{s^2 a_{23} k_2 + s a_{23} k_1 + a_{23} k_4}{s(s^2 - a_{21})}$$

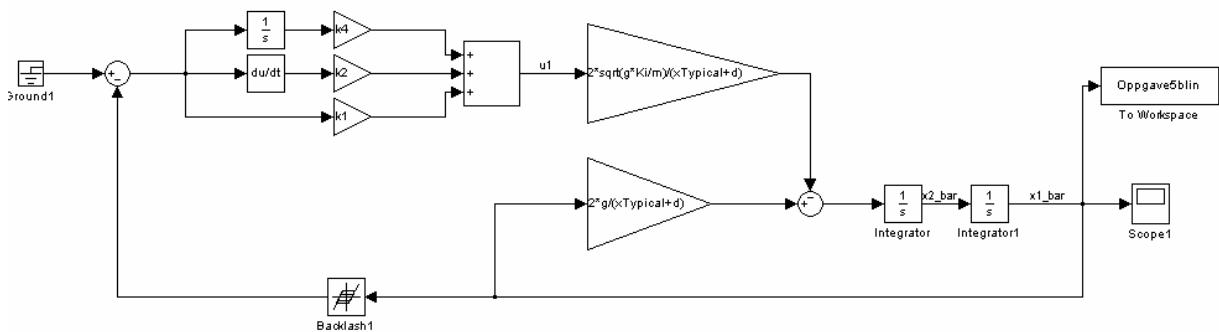
Plotter Nyquistdiagrammet for $G(s)$ i Matlab.



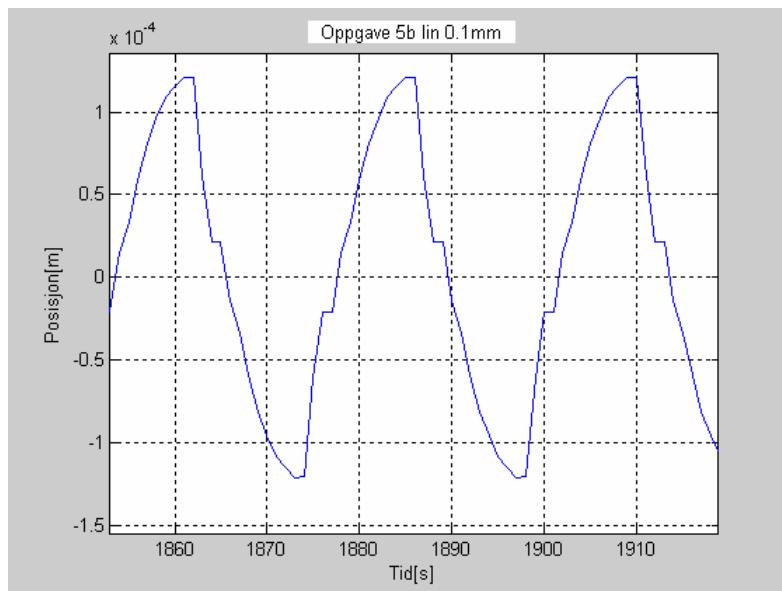
Figur 5.1 Nyquistdiagram

Den åpne sløyefunksjonen har en pol i høyre halvplan. Av Nyquistplottet ser man at punktet $(-1,0)$ er omsirklet av Nyquist-kurven i retning mot klokka. Det betyr at antall poler i høyre halvplan for det tilbakekoblede systemet er null, dvs. stabilt.

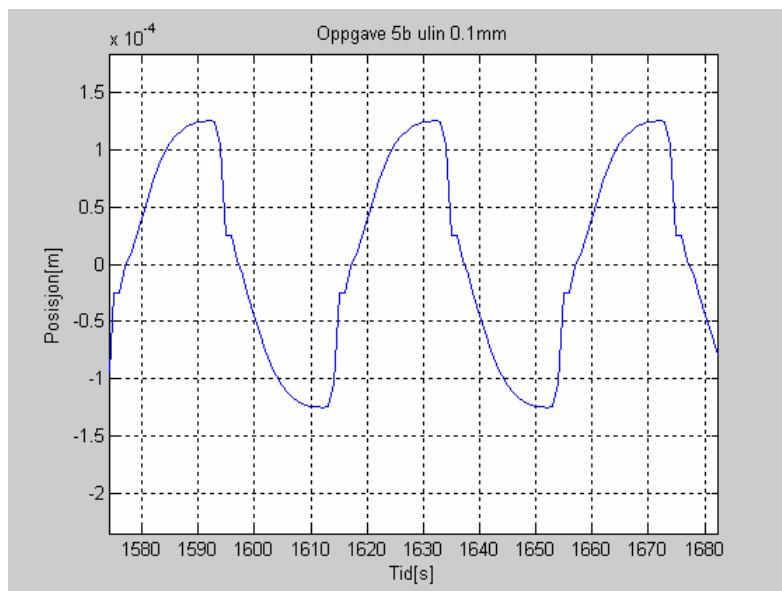
b) Simulering med hystereelement



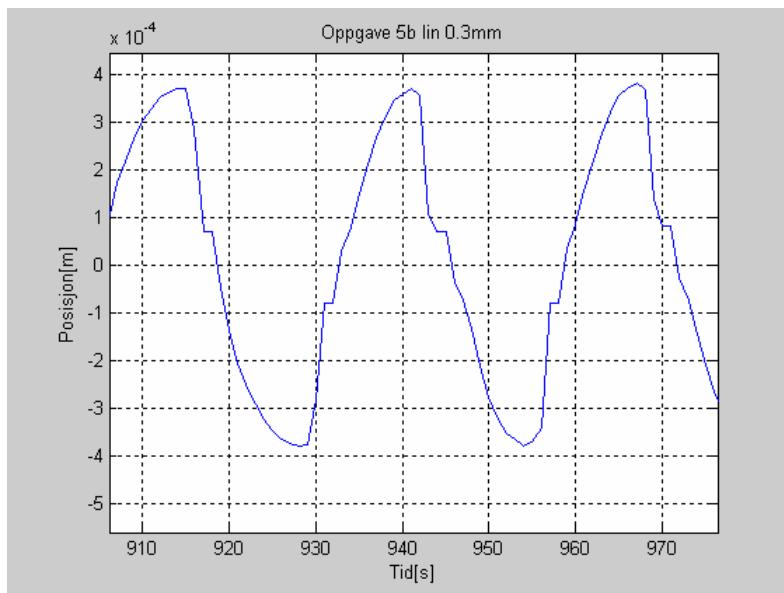
Figur 5.2 Lukket sløyfe lineær modell med hysteres



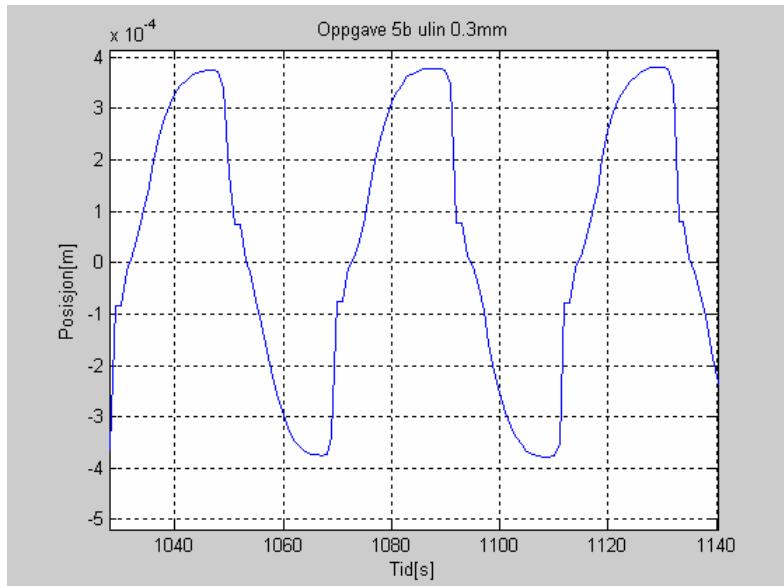
Figur 5.3 Simulering av lin modell med 0.1mm dødbånd



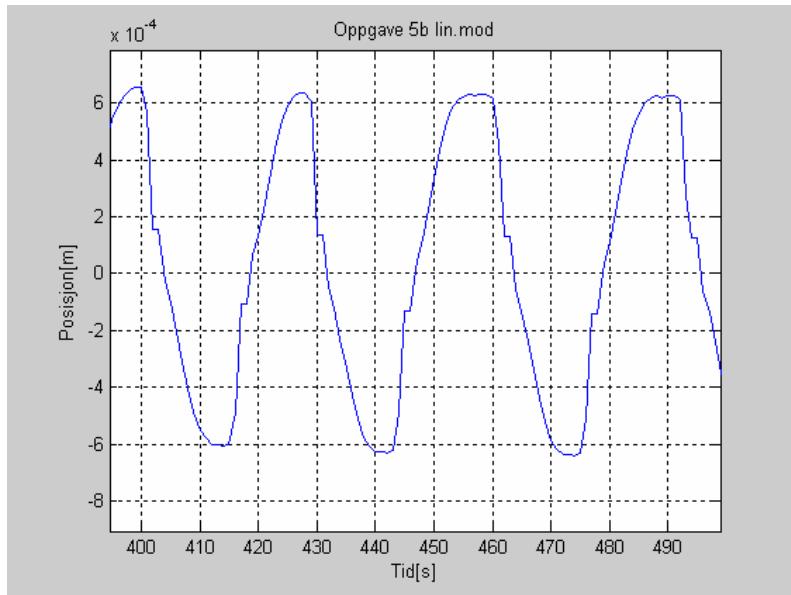
Figur 5.3 Simulering av ulin modell med 0.1mm dødbånd



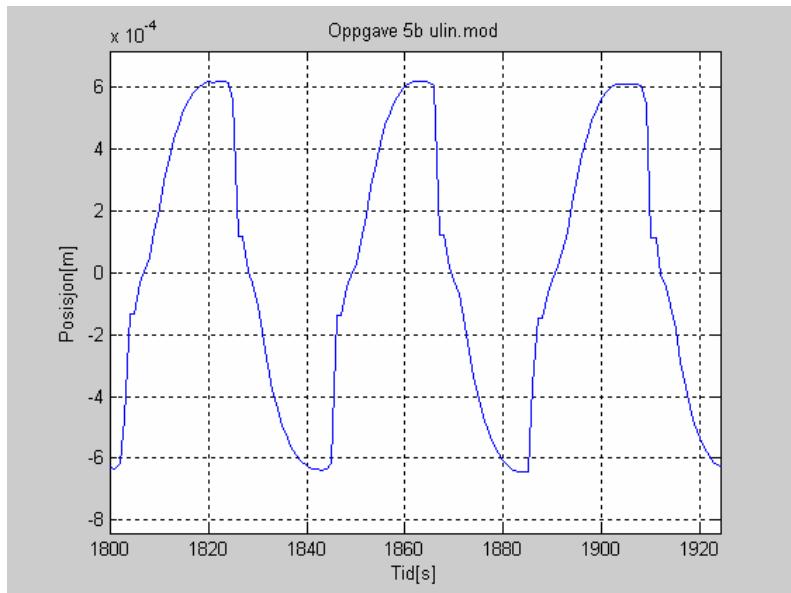
Figur 5.4 Simulering av lin modell med 0.3mm dødbånd



Figur 5.4 Simulering av ulin modell med 0.3mm dødbånd

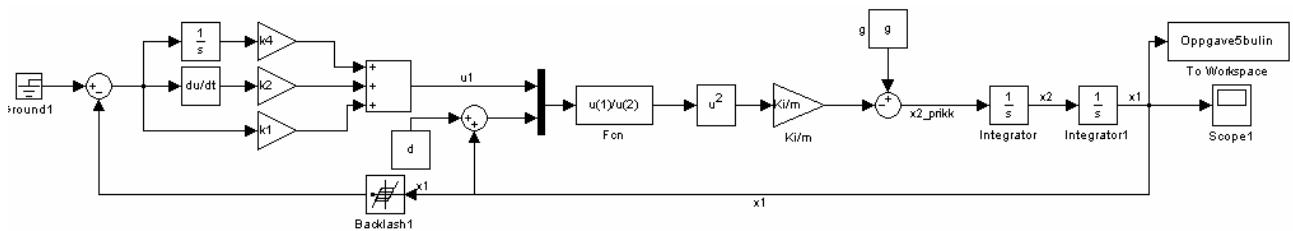


Figur 5.5 Simulering av lin modell med 0.5mm hysterese



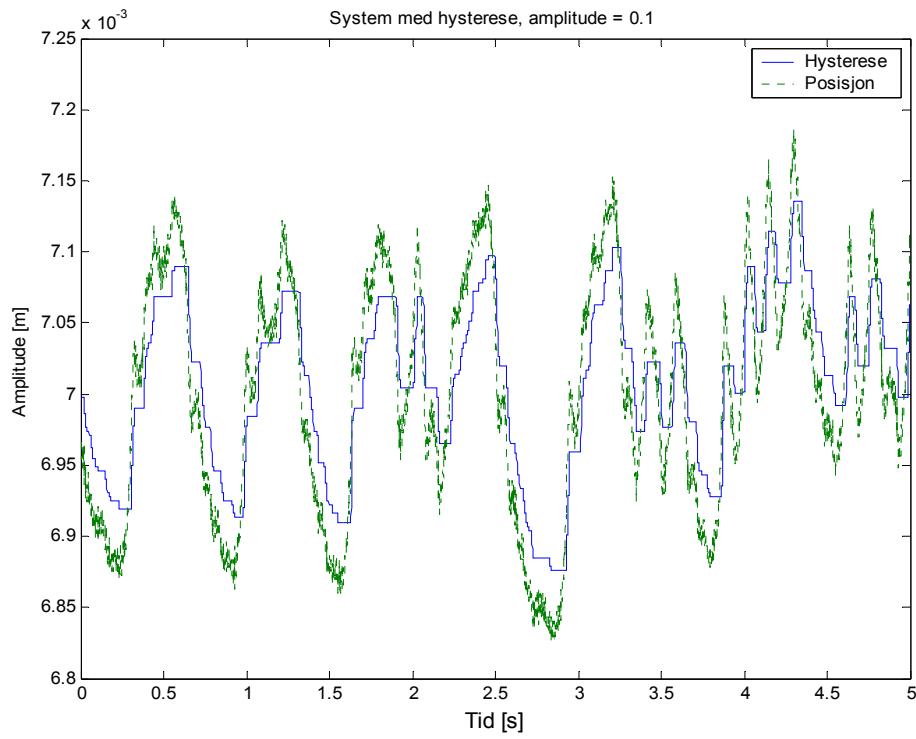
Figur 5.6 Simulering av ulin modell med 0.5mm hysterese

Ser av figurene at den lineære modellen gir høyere frekvens, men at modellene har tilnærma lik amplitude. Tidsaksen er 40x for stor pga en feil i plottingen i matlab.

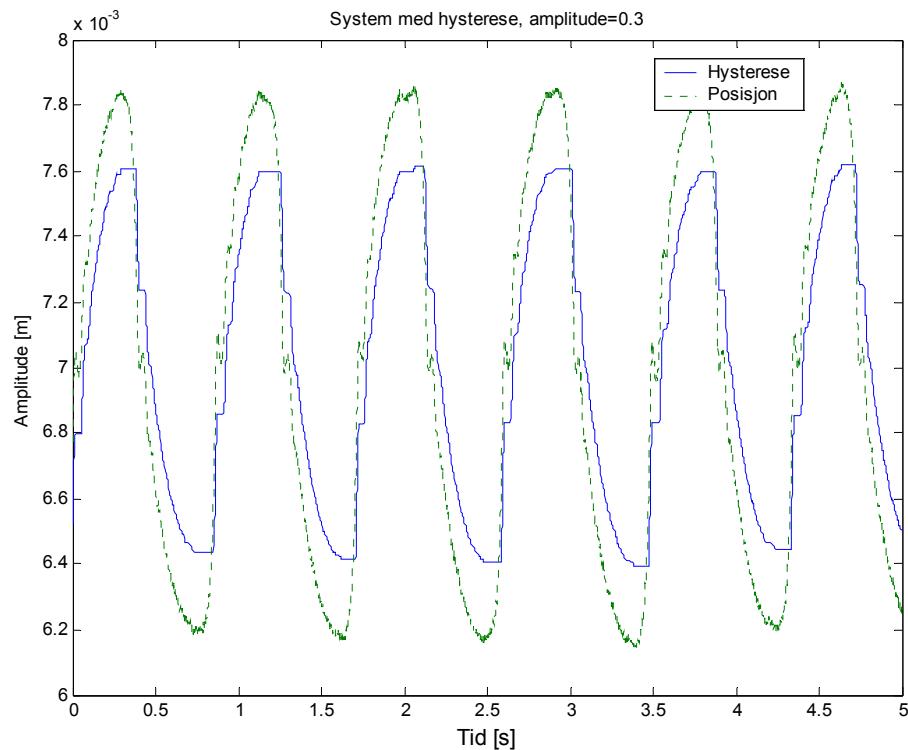


Figur 5.7 Lukket sløyfe ulin modell med hysterese på tilbakekoblingen

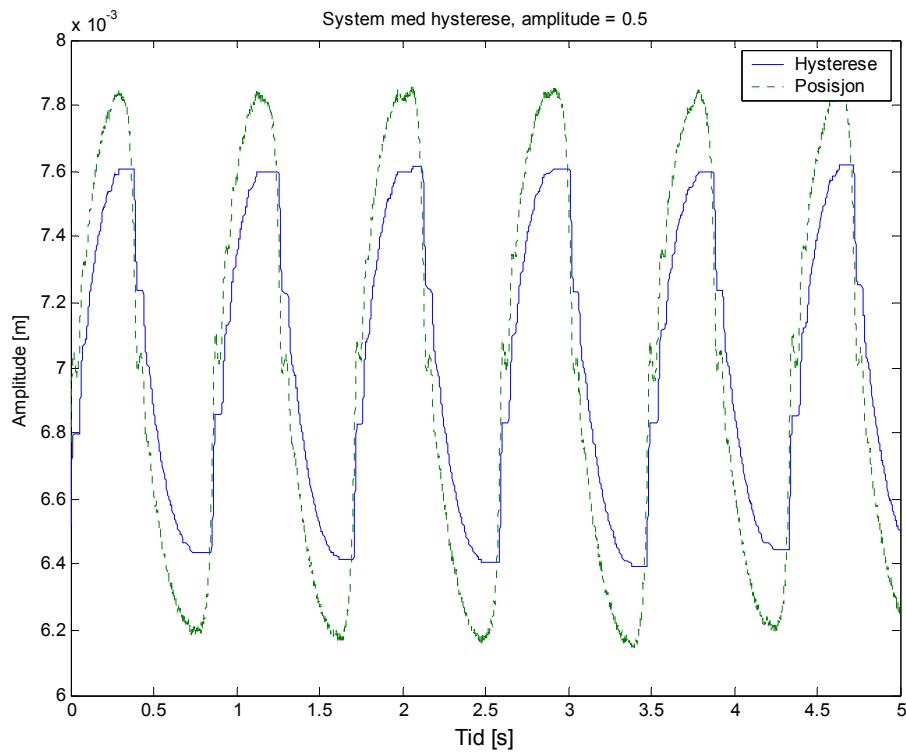
c) Laboratorieforsøk



Figur 5.7 Laboratorieforsøk, hysterese med amplitude 0,1 mm



Figur 5.8 Laboratorieforsøk, hysterese med amplitude 0,3 mm



Figur 5.9 Laboratorieforsøk, amplitude 0,5 mm

Plottene har stor likhet i amplitude, men har noe avvik når det gjelder frekvens. Ved en amplitude på 0.6 ble grensesykkelen ustabil.

d) Beskrivende funksjon for backlashelementet

Utgår fra oppgaven.

Oppgave 6 Inngang-Utgang linearisering

a) Definisjon

Systemet kan generelt skrives på formen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Vi måler kulens posisjonen, slik at målematrisen blir $y = x_1$.

Fra Definisjon 6.1 og 2.1 i oppgave 1 a) ser vi lett at :

$$Ax = f(x) \text{ og } Bu = G(x)u \text{ og } y = Cx = h(x)$$

Dermed er det vist at:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{k_i}{m} \frac{x_3^2}{(x_1 + d)^2} \\ -\frac{R_L + R_S}{L} x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad h(x) = x_1$$

b) Vis at systemet har relativ grad $\rho = 3$ i $\{x \in R^3 \mid x_3 \neq 0\}$:

$$y = x_1$$

$$\dot{y} = L_f h(x) = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = g - \frac{k_i}{m} \frac{x_3^2}{(x_1 + d)^2}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \\ &= \frac{d}{dx} \left(g - \frac{k_i}{m} \frac{x_3^2}{(x_1 + d)^2} \right) = -\frac{k_i}{m} \frac{2x_3 \cdot \dot{x}_3 (x_1 + d)^2 - x_3^2 2(x_1 + d)\dot{x}_1}{(x_1 + d)^4} \\ &= -2 \frac{k_i}{m} \frac{x_3 \cdot \dot{x}_3 (x_1 + d) - x_3^2 \dot{x}_1}{(x_1 + d)^3} = 2 \frac{k_i}{m} \frac{x_3 \cdot \left(\frac{R_L + R_S}{L} x_3 - \frac{1}{L} u \right) (x_1 + d) + x_3^2 x_2}{(x_1 + d)^3} \\ &= 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{R_L + R_S}{L} x_3^2 (x_1 + d) + x_2 x_3^2}{(x_1 + d)^3} - 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{1}{L} x_3}{(x_1 + d)^2} u \end{aligned}$$

Vi deriverer utgangen tre ganger slik at inngangen u kommer frem i likningen.
Systemet har en veldefinert relativ grad = 3.

$$1 \leq \rho \leq n$$

c) Lie-deriverte

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= L_f^{(\rho)} h(x) + L_g L_f^{(\rho-1)} h(x) \cdot u \\ \ddot{y} &= L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) \cdot u = L_f^3 x_1 + L_g L_f^2 x_1 \cdot u \end{aligned}$$

hvor:

$$L_f^3 h(x) = 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{R_L + R_S}{L} x_3^2 (x_1 + d) + x_2 x_3^2}{(x_1 + d)^3}$$

$$L_g L_f^2 h(x) = -2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{1}{L} x_3}{(x_1 + d)^2}$$

Setter så inn for $u = -\frac{Lm(x_1 + d)^2}{2K_i x_3} v + \frac{Lx_3 x_2}{(x_1 + d)} + (R_L + R_S) x_3$ inn i \ddot{y}

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{R_L + R_S}{L} x_3^2 (x_1 + d) + x_2 x_3^2}{(x_1 + d)^3} - 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{1}{L} x_3}{(x_1 + d)^2} \left(-\frac{Lm(x_1 + d)^2}{2K_i x_3} v + \frac{Lx_3 x_2}{(x_1 + d)} + (R_L + R_S) x_3 \right) \\ \ddot{y} &= 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{R_L + R_S}{L} x_3^2 (x_1 + d) + x_2 x_3^2}{(x_1 + d)^3} - \left(-\frac{Lm(x_1 + d)^2}{2K_i x_3} 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{1}{L} x_3}{(x_1 + d)^2} v + \frac{Lx_3 x_2}{(x_1 + d)} 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{1}{L} x_3}{(x_1 + d)^2} + (R_L + R_S) x_3 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{1}{L} x_3}{(x_1 + d)^2} \right) \\ \ddot{y} &= 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{R_L + R_S}{L} x_3^2 (x_1 + d)}{(x_1 + d)^3} + 2 \frac{k_i}{m} \frac{x_2 x_3^2}{(x_1 + d)^3} + v - 2 \frac{k_i}{m} \frac{x_2 x_3^3}{(x_1 + d)^3} - 2 \frac{k_i}{m} \frac{\frac{(R_L + R_S)}{L} x_3^2 (x_1 + d)}{(x_1 + d)^3} \\ \underline{\underline{\ddot{y} = v}}\end{aligned}$$

d) Normalform og nulldynamikk

Generelt kan systemet skrives som

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c \xi \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \cdot \gamma(x) [u - \alpha(x)] \\ y &= C_c \xi\end{aligned}$$

hvor $\dot{\eta}$ beskriver den indre dynamikken og $\dot{\xi}$ eksterndynamikken. Siden antall tilstander og relativ grad er like, $\rho = n = 3$, reduseres likningen til

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \cdot \gamma(x) [u - \alpha(x)] \\ y &= C_c \xi\end{aligned}$$

Variabelen η eksisterer ikke, så derfor har systemet ingen nulldynamikk. Systemet har da minimum fase.

Vi lager en tilstandsvektor av de Lie-deriverte $\xi = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$

Vi deriverer ξ og setter inn $y^{(3)} = v$

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Systemet er nå på kanonisk normalform.

Oppgave 7 Regulator

a) Tilstandsrommodell

Tilstandsvektor:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi^T - \xi^{*T} \\ \int \zeta_1 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - y^* \\ \dot{y} - \dot{y}^* \\ \ddot{y} - \ddot{y}^* \\ \int (y - y^*) dt \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \zeta_1 = y - y^*$$

Vi deriverer tilstandsvektoren og vet at $y^{(3)} = v$:

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{y} - \dot{y}^* \\ \ddot{y} - \ddot{y}^* \\ \dddot{y} - \dddot{y}^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - y^* \\ \dot{y} - \dot{y}^* \\ \ddot{y} - \ddot{y}^* \\ \int (y - y^*) dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bv$$

b) Utled et uttrykk for tilstandstilbakekoblingen $v = -K\zeta$:

Setter inn for v i den utvida matrisen og definerer $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$:

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-K\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K \\ 0 \end{bmatrix} \zeta$$

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_1 & -K_2 & -K_3 & -K_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta$$

Reguleringslov $v = -K\zeta$

$$\text{Vi ser på tilstandsvektoren } \zeta \text{ at vi har } \zeta = \begin{bmatrix} y - y^* \\ \dot{y} - \dot{y}^* \\ \ddot{y} - \ddot{y}^* \\ \int (y - y^*) dt \end{bmatrix} = \begin{array}{l} P\text{-ledd} \\ D\text{-ledd} \\ D^2\text{-ledd} \\ I\text{-ledd} \end{array}$$

Altså en PID-regulator

c) Finn K ved polplassering:

Designer K slik at matrisen (Ac-BcK) blir Hurwitz og får reelle poler:

Ønsket poler: -10 -20 -30 -40 = $(s+10)(s+20)(s+30)(s+40)$

$$\det[\lambda I - A_c + B_c K] = 0$$

Deretter sammenlikner vi polynomene og løser likningene mhp K

Kan også bruke matlab

`place[A,B,[-10 -20 -30 -40]]`

Som gir oss

$$K_1 = 50000$$

$$K_2 = 3500$$

$$K_3 = 100$$

$$K_4 = 240000$$

d) Simulering av modell

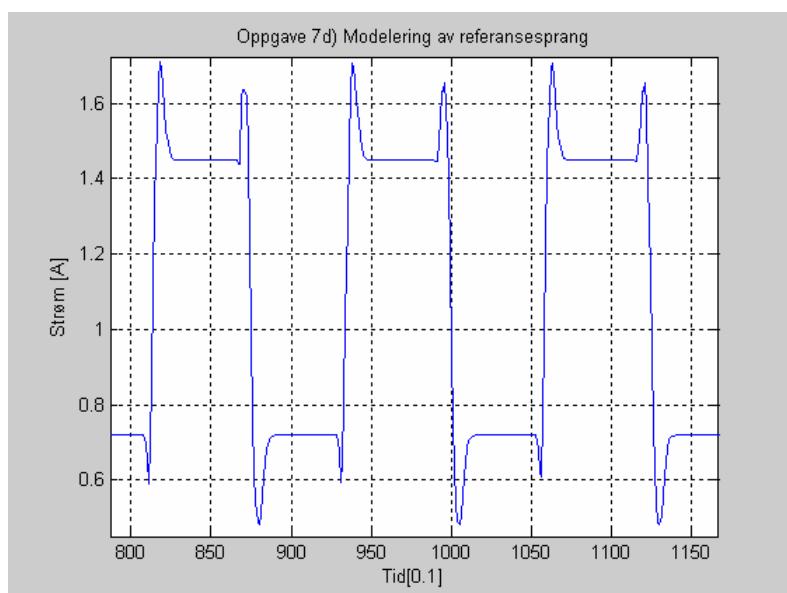


Figure 7.1 Firkantpuls referanse-simulering strømpådrag, amp 5mm

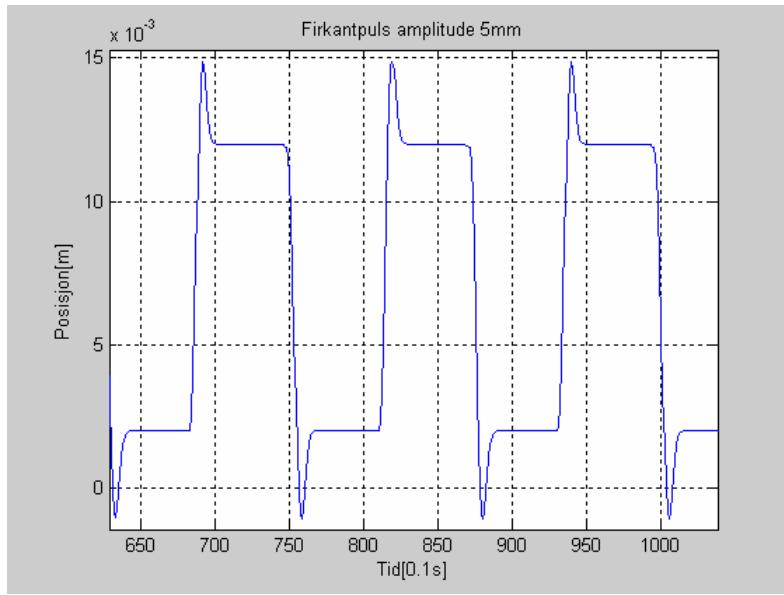
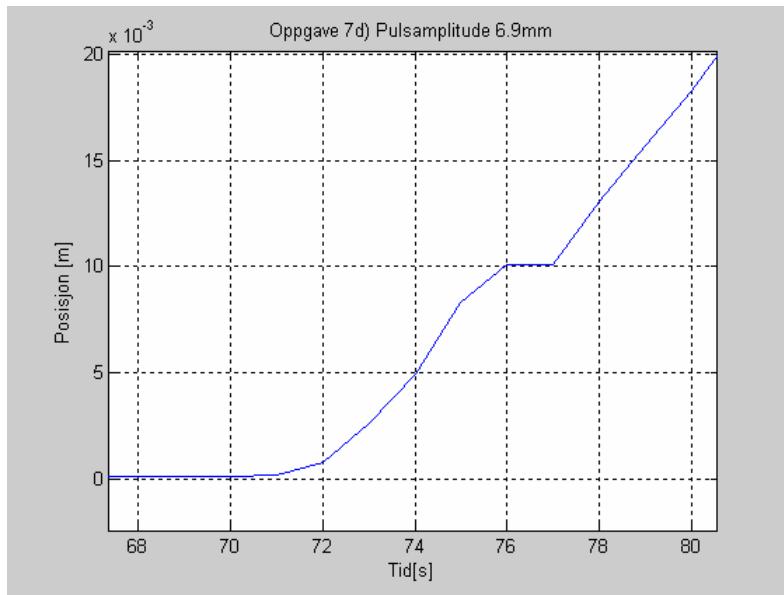
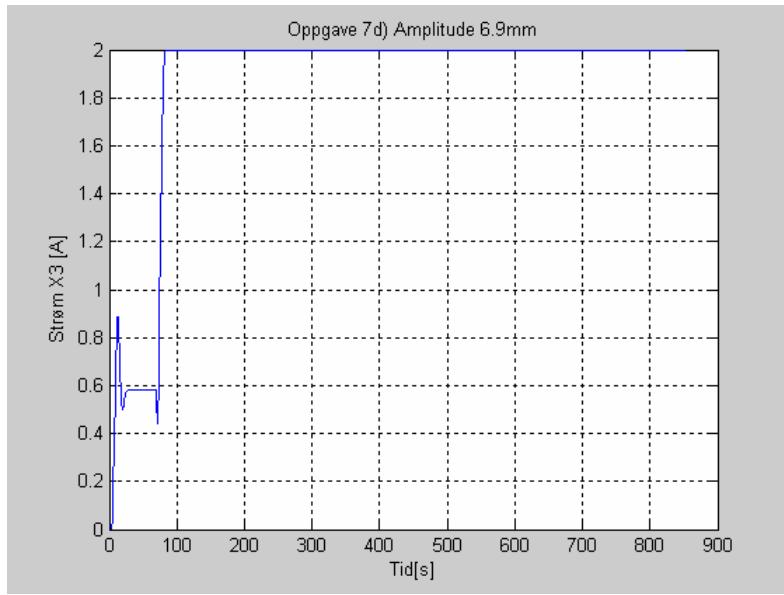


Figure 7.2 Firkantpuls referanse-simulering posisjon, amp 5mm

Ved økning av amplituden fant vi kritisk amplitude for systemet lik 6.9mm



Figur 7.1 2 Firkantpuls referanse-simulering posisjon, amp 6.9mm



Figur 7.2 Firkantpuls referanse-simulering posisjon, amp 6.9 mm

e) Anvendelse av regulator på systemet

Selv med justering av polvalg og modellgjennomgang ville ikke systemet stabilisere seg.

Konklusjon

Oppgaven medførte en praktisk gjennomgang av tidligere gjennomgått teori og har bidratt til øket forståelse av fagets anvendelse. Det er derfor å beklage at vi ikke lyktes med å finne tilfredsstillende parametere for regulering av systemet.