

Løsning øving 9

Oppgave 4.71 Finn strømfunksjonen $\psi(x,y)$ og skissér noen strømlinjer for kombinasjonen av en positiv (mot klokka) potensialvirvel i $(a,0)$ og en negativ potensialvirvel i $(-a,0)$, begge med styrke K .

Strømfunksjonen for en positiv (mot klokka) potensialvirvel plassert i origo er gitt ved

$$\psi = -K \cdot \ln r$$

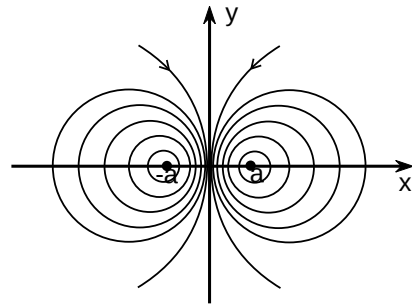
Her kan vi ikke bruke r som avstand fra origo. Bytter til kartesiske koordinater, og kombinerer de to virvlene:

$$\psi(x,y) = -K \cdot \ln r_1 + K \cdot \ln r_2$$

$$\text{der } r_1^2 = (x - a)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi(x,y) = K \cdot \ln \sqrt{\frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}}}}$$



Oppgave 4.77 En tornado modelleres som et linjesluk med styrke $m = -1000 \text{ m}^2/\text{s}$ og en potensialvirvel med styrke $K = 1600 \text{ m}^2/\text{s}$. Finn vinkelen mellom en vilkårlig radiell linje og strømlinjene, og vis at den uavhengig av r og θ . Bestem radius r der trykket $p = 29 \text{ in Hg}$ i forhold til standard atmosfæretrykk ved havoverflaten.

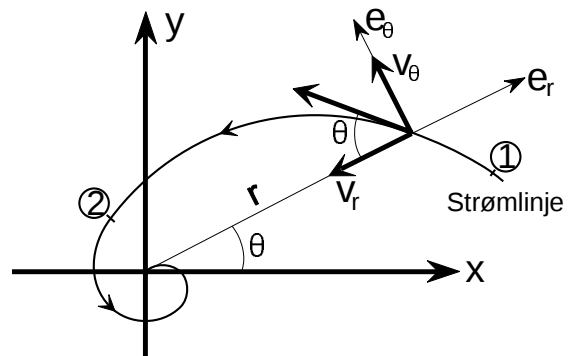
Strømfunksjon for linjesluk + potensialvirvel:

$$\psi(r, \theta) = -m\theta - K \ln r$$

Dette gir hastighetskomponentene:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{m}{r}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{K}{r}$$



$$\text{Geometri: } \tan \theta = \left| \frac{v_\theta}{v_r} \right| = \left| \frac{K}{m} \right| \Rightarrow \underline{\underline{\phi = \tan^{-1} \left| \frac{K}{m} \right| = 58^\circ \text{ uavhengig av } r \text{ og } \theta.}}$$

Bruker Bernoulli fra 1 (uendelig) til 2:

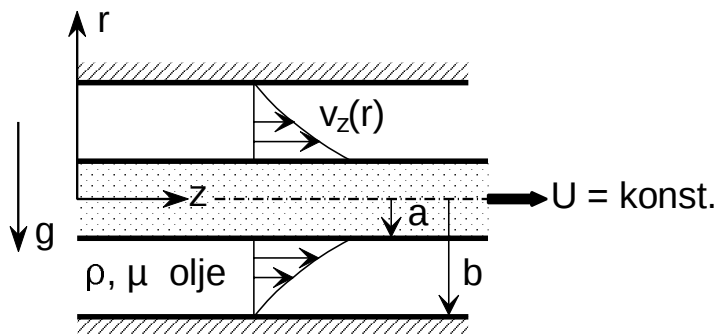
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

Her foregår strømmingen i planet: $z_1 = z_2$, $v_1 \approx 0$, $p_1 = p_a$ og $p_2 = 29 \text{ in Hg} = 98.04 \text{ kPa}$:

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_a - p_2)} = 73.5 \text{ m/s}$$

$$\text{Men } v_2^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{1}{r^2}(m^2 + K^2) \Rightarrow r = \frac{1}{v_2} \sqrt{m^2 + K^2} = \underline{\underline{25.7 \text{ m}}}$$

Oppgave 4.88



Finn hastighetsfordelingen $v_z(r)$ når det er gitt at trykket er konstant og vi har stømning kun i aksial retning.
Grensebetingelser ?

z-komponenten av Navier-Stokes likning, polarkoordinater (E7):

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

Da trykket er konstant og $\vec{v} = (0, 0, v_z(r))$ reduseres z-komponenten til:

$$0 = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \Rightarrow v_z(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Grensebetingelser: Heft på veggene gir $v_z(r=a) = U$ og $v_z(r=b) = 0$:

$$\Rightarrow C_1 = \frac{U}{\ln(a/b)}, \quad C_2 = -C_1 \cdot \ln b \Rightarrow \underline{\underline{v_z(r) = U \cdot \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}}}$$