

Løsning øving 7

Oppgave 4.20 Finn det mest generelle uttrykket vi kan ha for $v(x,y)$, og finn dimensjonene for konstantene K og a .

Gitt $u = K(1 - e^{-ay})$ for $x \leq L$ og $0 \leq y \leq \infty$.

Krav til hastighetskomponentene for 2-dimensjonal inkompressibel strømning: massebevarelse!

Kontinuitetslikningen:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

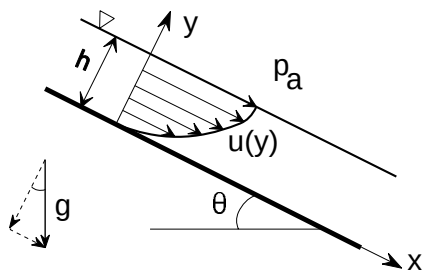
$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[K(1 - e^{-ay})] = 0$$

$$\Rightarrow v = v(x) \text{ kun.}$$

Grensebetingelse $y = 0$: $v = v_0$ for alle $x \Rightarrow \underline{v = v_0 \text{ overalt.}}$

Dimensjoner: $\{a\} = 1/\text{Lengde}$ og $\{K\} = \text{hastighet} = \text{Lengde}/\text{Tid}$.

Oppgave 4.36 Finn $C = C(\rho, g, \mu, \theta)$ og volumstrømmen Q .



Gitt $u(y) = Cy(2h - y)$, $v = w = 0$.

Beregn de deriverte:

$$\frac{du}{dy} = C2h - C2y$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -C2$$

Innsatt i x-komponenten av Navier-Stokes likning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow 0 = g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Her kan vi ikke ha trykk-variasjon i x-retning pga. den fri væskeoverflaten der trykket er konstant. Setter inn for den dobbel-derivate:

$$0 = g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} (-C2) \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu}}}$$

Volumstrømmen Q per lengdeenhet:

$$Q = \int_0^h u \, dy = \int_0^h C y (2h - y) \, dy = C \left[h y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^h = \frac{2}{3} C h^3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q = \frac{\rho g h^3 \sin \theta}{3 \mu}}}$$

Oppgave 4.43 Finn de korrekte grensebetingelsene i oppgave 4.36 for a) $y = 0$ b) $y = h$

a) Strømning langs bunnen, heftbetingelse: $u(y=0) = 0$

b) Fri overflate (vann/luft) uten friksjonskrefter på overflaten: $\tau_{y=h} = 0$

$$\text{dvs.} \quad \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{du}{dy} \Big|_{y=h} = 0}}$$