

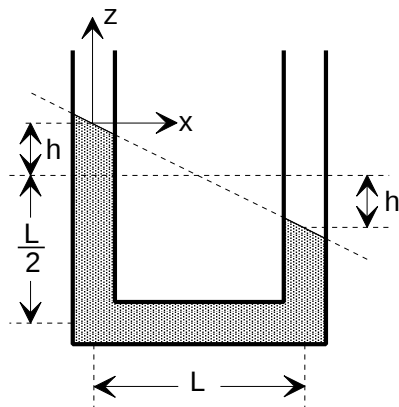
Løsning øving 4

Oppgave 2.150 Finn høyden h for akselerometeret.

Utgangspunktet er Newton's 2. lov (pr. volumenhet), skrevet for et akselerert system som ikke har noen relativ bevegelse, dvs. kvasi-statikk:

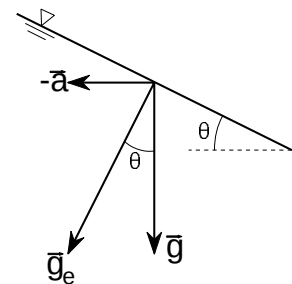
$$0 = -\nabla p + \rho(\vec{g} - \vec{a})$$

For å oppnå statiske forhold i et relativt system, kan $\vec{a}$ være enten konstant eller ren sentripetal-akselerasjon.



Når U-røret akselereres med en konstant akselerasjon på 5 m/s^2 mot høyre vil, etter at likevekt er oppnådd, væskeoverflaten danne en rett linje.

Helningen på væskeoverflaten står vinkelrett på den effektive (relative) tyngdekraften: $\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{a}$



Helningen blir da $-a/g$, og nivåforskjellen på $2h$ i U-røret blir:

$$\frac{2h}{L} = \frac{a}{g} \Rightarrow h = \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} \quad \text{dvs. } h \text{ varierer lineært med}$$

Alternativt kan oppgaven løses ved først å finne trykket $p(x,z)$ i væsken:

$$\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \quad \text{der} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \vec{g} = (0, 0, -g) \quad \vec{a} = (a, 0, 0)$$

Dekomponerer og integrerer:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \Rightarrow p = -\rho a x + F(z)$$

$$\Rightarrow p(x,z) = -\rho a x - \rho g z + C$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + G(x)$$

Med origo som i det viste aksekorset blir integrasjonskonstanten C lik atmosfæretrykket p_a :

$$p(x,z) = p_a - \rho a x - \rho g z$$

Ved nå å forlange trykket konstant lik p_a finner vi likningen for væskeoverflaten:

$$p(x,z) = p_a = p_a - \rho a x - \rho g z \Rightarrow \underline{z = -x \cdot a / g} \quad \text{som over.}$$

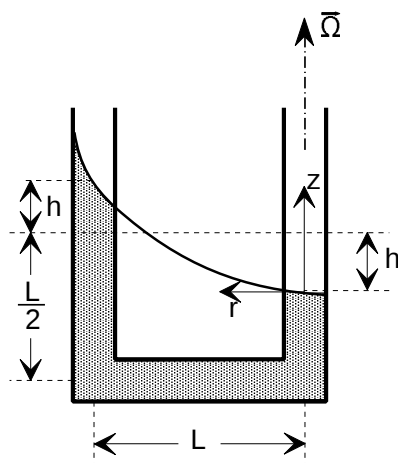
Oppgave 2.153

Finn høyden h for U-røret i oppgave 2.150 når det roteres om den høyre greina.

Her blir utgangspunktet

$$0 = -\nabla p + \rho(\vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}))$$

Når r -aksen står vinkelrett på rotasjonsaksen blir sentripetal-akselerasjonen $-\Omega^2 r$ i radiell retning.



Finner trykket $p(r,z)$ i væsken:

$$\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \quad \text{der} \quad \vec{a} = (-\Omega^2 r, 0, 0)$$

Dekomponerer og integrerer:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \Rightarrow p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + F(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + G(r)$$

Ved sammenlikning:

$$p(r,z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + C$$

Med origo som i det viste aksekorset blir integrasjonskonstanten C lik atmosfæretrykket p_a :

$$p(r,z) = p_a + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z$$

Ved nå å forlange trykket konstant lik p_a finner vi likningen for væskeoverflaten:

$$p(r,z) = p_a = p_a + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z \Rightarrow \underline{z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}}$$

Høydeforskjellen på $2h$ kan nå uttrykkes ved:

$$2h = z(L) = \frac{\Omega^2 L^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{\Omega^2 L^2}{4g}$$

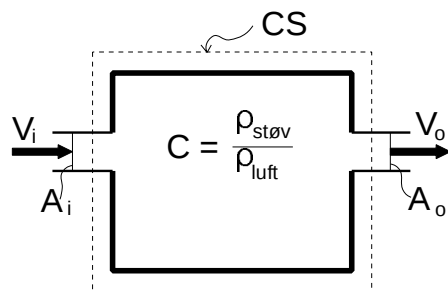
Totalt så blir høyden i den venstre greina:

$$\underline{\underline{\text{Venstre høyde} = \frac{L}{2} + \frac{\Omega^2 L^2}{4g}}}$$

Tallverdi: $\Omega = 95 \text{ r/min} \cdot 2\pi/60\text{s} = 9.9484\text{s}^{-1}$, $L = 0.18\text{m}$, $g = 9.81\text{m/s}^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{\text{Venstre høyde} = 0.172\text{m}}}$

Oppgave 3.11 Finn massestrømmen av støv $\dot{m}$ ut av rommet.



Betrakter støvet i rommet som system, og setter opp massebevarelse:

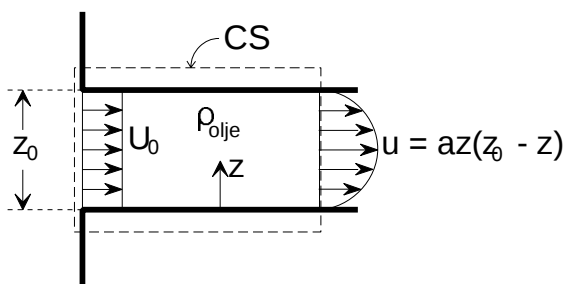
$$\frac{d}{dt} B_{\text{syst}} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_{\text{støv}} dV + \int_{CS} \rho_{\text{støv}} (\vec{V}_{\text{støv}} \cdot \vec{n}) dA$$

Endring av B_{syst} (= massen til støvet i systemet) er null. Innstrømning av ren luft endrer ikke støvmengden i rommet, mens ved utløpet vil støvet transporteres ut med lufthastigheten V_o .

De to integralene er begge uttrykk for endring av støvmengden i rommet, men siden vi kjenner utløpshastigheten er det lettere å regne ut fluksleddet:

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_{\text{støv}} dV = - \int_{\text{ut}} \rho_{\text{støv}} V_o dA = \underline{\underline{-C \rho_{\text{luft}} V_o A_o}}$$

Oppgave 3.17 Finn u_{max} i cm/s.



Siden fluidet har konstant tetthet kan vi regne volumstrømmen Q mellom platene som konstant:

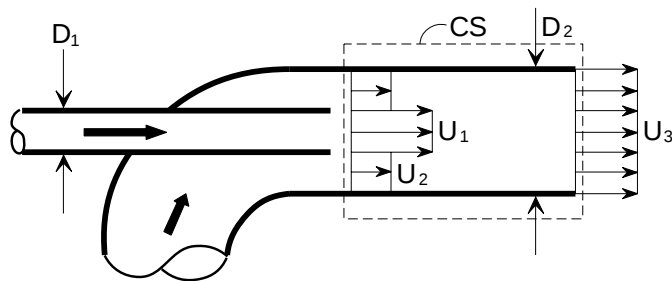
$$Q = \int_{\text{inn}} \int U_0 dA = \int_{\text{ut}} \int u dA$$

$$U_0 \cdot z_0 \cdot \text{bredde} = \text{bredde} \int_0^{z_0} az(z_0 - z) dz = \text{bredde} \cdot a \left[\frac{1}{2} z_0 z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{z_0} = \text{bredde} \cdot a \cdot \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = 6U_0/z_0^2}}$$

$$u_{\max} = u\left(\frac{z_0}{2}\right) = \frac{6U_0}{z_0^2} \cdot \frac{z_0}{2} \left(z_0 - \frac{z_0}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}U_0}} = 12 \text{ cm/s}$$

Oppgave 3.36 Finn utløpshastigheten U_3 i m/s.



Siden tetthet for vann er konstant, blir likningen for massebevarelse:

$$\iint_{CS} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Vi må passe på å tegne kontrollvolumet over tverrsnitt der vi kjenner hastigheten:

$$Q = U_1 \frac{\pi}{4} D_1^2 + U_2 \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2) = U_3 \frac{\pi}{4} D_2^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U_3 = U_1 (D_1/D_2)^2 + U_2 (1 - (D_1/D_2)^2)}}$$

Tallverdier: $U_1 = 40 \text{ m/s}$, $U_2 = 3 \text{ m/s}$, $D_1/D_2 = 3/10 \Rightarrow \underline{\underline{U_3 = 6.33 \text{ m/s}}}$