Løsning øving 12

Oppgave 8.14 Bestem virvlingen og trykkfordelingen i en tornado.

Gitt modell for en tornado:

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = \omega r \quad \text{for} \quad r \le R$$

$$v_\theta = \frac{\omega R^2}{r} \quad \text{for} \quad r > R$$

Strømningen er rotasjonsfri (virvlingsfri) hvis

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) = 0$$

Her: $$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) = 2\omega \quad \text{for} \quad r \le R,$$

$$= 0 \quad \text{for} \quad r > R$$

Trykket i r-retning finnes ved å integrere impulslikningen (r-komp., E5):

$$0 + 0 - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad \text{for } r \le R,$$

$$= \rho \omega^2 \frac{R^4}{r^3} \quad \text{for } r > R$$

Integrerer opp de to uttrykkene:

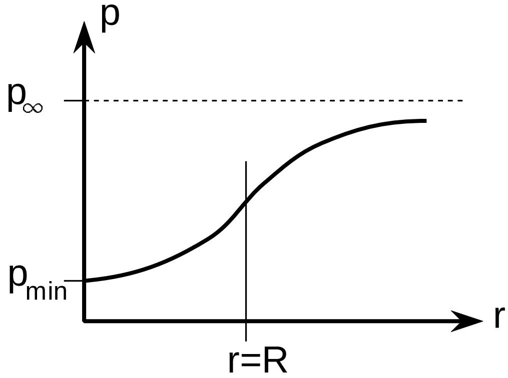
$$p_{r \le R} = \int \rho \omega^2 r \, dr = \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 + C_1$$

$$p_{r > R} = \int \rho \omega^2 \frac{R^4}{r^3} dr = -\frac{\rho}{2}\omega^2 \frac{R^4}{r^2} + C_2$$

Grensebetingelser for trykket:

$$p_{r>R} \rightarrow p_\infty \quad \text{når} \quad r \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad C_2 = p_\infty$$
$$p_{r\le R} \rightarrow p_{r>R} \quad \text{når} \quad r \rightarrow R \quad \Rightarrow \quad C_1 = p_\infty - \rho\omega^2 R^2$$

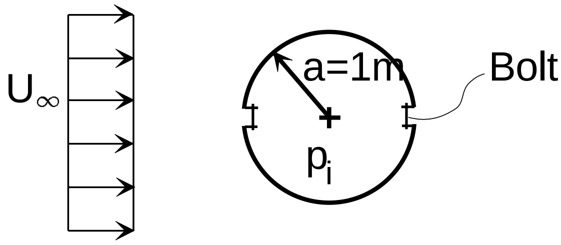
$$p_{r\le R} = p_\infty - \frac{\rho}{2}\omega^2 R^2 \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$
$$\underline{\underline{p_{r>R} = p_\infty - \frac{\rho}{2}\omega^2 \frac{R^4}{r^2}}}$$



Det laveste trykket finner vi i origo der $p_{min} = p_\infty - \rho\omega^2 R^2$.

<u>Oppgave 8.46</u> Beregn boltekreftene (N).

Gitt: Friksjonsfri strømning, U_∞ = 25 m/s, a = 1 m, p_i = 50 kPa (overtrykk), 20 bolter/ m.



Fra potensialteorien modelleres strømningen rundt en sylinder ved uniform strøm + dublett (se oppgave 8.47). Etter å ha funnet hastighetskomponentene v_r og v_θ, funnet styrken på dubletten $\lambda = U_\infty a^2$ fra kravet v_r = 0 på sylinderveggen (r=a), finnes trykket p_s på sylinderveggen fra Bernoulli's likning (gyldig fordi det er friksjonsfritt, og enkel å bruke siden det er virvlingsfritt) fra uendelig til et punkt (r=a,θ):

$$p_s - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta)$$

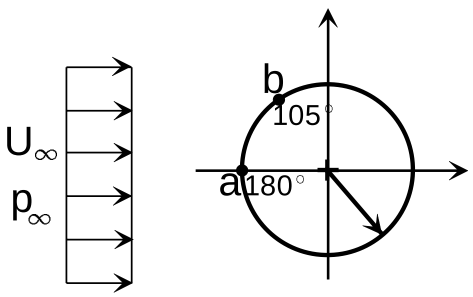
Ser på halve sylinderen. Trykket både inni og utenfor er gitt som overtrykk ("gage").
Den resulterende kraften (pr. lengde) fås ved å integrere trykket over sylinderflaten.

Innsiden: $F_i = p_i \cdot 2a = 100\ \mathrm{kN/m}$

Utsiden: $$F_s = \int_0^{\pi} (p_s - p_\infty)\cdot \sin\theta \cdot r\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta)\sin\theta \cdot r\, d\theta$$
$$= -1275\ \mathrm{N/m}$$

Total kraft: $F_{total} = F_i - F_s = 101275$ N/m. Kraft pr. bolt: $F_{Bolt} = T_{total}/20 = \underline{\underline{5064\ \mathrm{N}}}$

Oppgave 8.47 Finn U_∞ som funksjon de av to målte trykk p_a og p_b, ρ og a.



Strømning rundt en sylinder modelleres som Uniform strøm + dublett:

$$\psi(r,\theta) = U_\infty r \sin\theta - \frac{\lambda \sin\theta}{r}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = (U_\infty - \frac{\mathrm{lamdba}}{r^2})\cos\theta$$
$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -(U_\infty + \frac{\mathrm{lamdba}}{r^2})\sin\theta$$

Krav til v_r: $v_r = 0$ for $r = a \Rightarrow \lambda = U_\infty a^2$.

Bruker Bernoulli's likning fra p_a (θ=180°) til p_b (θ=105°):

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{v_a^2}{2} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{v_b^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p_a - p_b = \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

fordi $v_a = 0$ (stagnasjonspunkt). Setter inn for hastigheten v_b:

$$v_b = v_\theta(r = a, \theta = 105°) = (U_\infty + \frac{\lambda}{a^2})\sin(105°) = 2U_\infty \sin(105°)$$

$$\Rightarrow \quad p_a - p_b = 2\rho U_\infty^2 \sin^2(105°) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{U_\infty = \frac{1}{\sin(105°)}\sqrt{\frac{p_a - p_b}{2\rho}}}}$$

Oppgave 8.57

I prinsippet er det mulig å bruke roterende sylindre som flyvinger. Vi har en sylinder med diameter 30cm som rotererer med 2400 omdr./min. Vingen skal løfte et 55kN fly som flyr med hastigheten 100 m/s. Hva må sylinderlengden være? Hvor stor effekt kreves for å holde denne hastigheten? (Neglisjer endeeffekter på den roterende vingen.)

Potensialteori løsning:

Strømfunksjonen til en uniform strømning forbi en sylinder med sirkulasjon er (se figur 8.10 i boka):

$$\psi = U_\infty \sin\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) - K\ln\frac{r}{a}$$

a er sylinderens radius

K er et mål på sirkulasjonens styrke

Vi er interessert i å regne ut løftet på sylinderen. Da må vi ha et uttrykk for trykket langs sylinderoverflaten. Kan bruke bernoulli ettersom hvirvlingen er lik 0.

Langs sylinder overflaten vet vi at $v_r = 0$.

v_θ er gitt ved

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty \sin\theta\left(r + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{K}{r}$$

v_θ ved sylinderoverflaten er

$$v_\theta(r = a) = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -2U_\infty \sin\theta + \frac{K}{a}$$

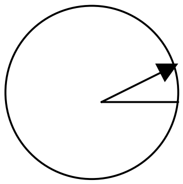
Bruker Bernoulli:

$$P_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_s + \tfrac{1}{2}\rho v_\theta(r = a)^2$$

Løser ut P_s:

$$P_s = P_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(1 - 4\sin^2\theta - \frac{4K}{U_\infty a}\sin\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\right)$$

radius r = a



$$L = \int (P_s - P_\infty)\sin\theta \, dA \qquad\qquad dA = a\, d\theta\, b$$

$$L = \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 ba \int_0^{2\pi}\left(\sin\theta - 4\sin^3\theta - \frac{4K}{U_\infty a}\sin^2\theta - \frac{K^2}{U_\infty^2 a^2}\sin\theta\right)d\theta$$

Vi vet at integralet fra 0 til 2π av 1., 2. og 4. Ledd inne i parantesen blir lik null (sinθ opphøyd i oddetall) .

$$L = \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 ba \int_0^{2\pi} -\frac{4K}{U_\infty a}\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$L = -\rho U_\infty (2\pi K) b$$

Løser ut lengden på sylinderen b:

$$\underline{\underline{b}} = \frac{-L}{\rho U_\infty (2\pi K)} = \frac{-55000}{1{,}23\ 2\pi((-2400\ 2\pi)/60)\, 0{,}15^2\ 100} = \underline{\underline{12{,}6m}} \qquad , K = \omega a^2$$

Med potensialteori er draget D lik 0 ⇒ Det kreves 0 effekt for å holde flyet igang, noe som klart ikke stemmer med virkeligheten.

Løsning ut i fra eksperimentelle data (figur 8.11):

"hastighetsforhold": $\dfrac{a\omega}{U_\infty} = \dfrac{0.15(2400\ 2\pi/60)}{100} = 0{,}38$

Leser av i figuren: $C_L \approx 1{,}8$ $\qquad$ $C_D \approx 1.1$

Løser ut lengden på sylinder b:

$$L = C_L \tfrac{\rho}{2} U_\infty^2 2ab = 55000$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = 17m}}$$

Draget blir da $D = C_D \tfrac{\rho}{2} U_\infty^2 2ab = 33600N$

Påkrevd effekt blir da: $\underline{\underline{\mathrm{P}}} = \mathrm{DU} = 33600\,100 = \underline{\underline{3.4\mathrm{MW}}}$

Veldig høy effekt, og her er ikke den effekten som kreves for å holde sylinderen i rotasjon inkludert. Dette er en særdeles uøkonomisk måte å fly på!