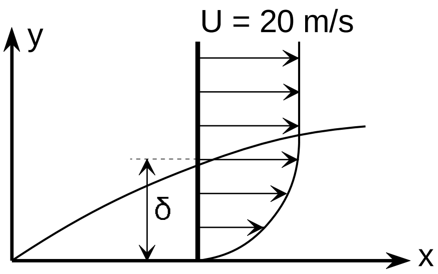
Løsning øving 11

Oppgave 7.1 Gitt uniform strømning langs en flat plate. Estimèr avstanden x når grensesjikttykkelsen er a) δ = 1 mm og b) δ = 10 cm.



Luft 20°C: $\rho = 1.2\ kg/m^3$, $\mu = 1.8\cdot10^{-5}$ kg/ms, $Re_{xcrit} = 5\cdot10^5$ (overgang til turbulens).

a) Antar at strømningen er laminær:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{Re_x^{1/2}}, \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu}, \quad \nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta}{x} \approx 5.0\left(\frac{\mu}{Ux\rho}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{U\rho}{\mu}\left(\frac{\delta}{5.0}\right)^2 = 0.0533\ \text{m}$$

Kontrollerer om antagelsen holder:

$$Re_x = \frac{Ux\rho}{\mu} = 71000 < Re_{xcrit} \quad \text{Ok!} \quad \underline{\underline{x = 0.0533\ \text{m}}}$$

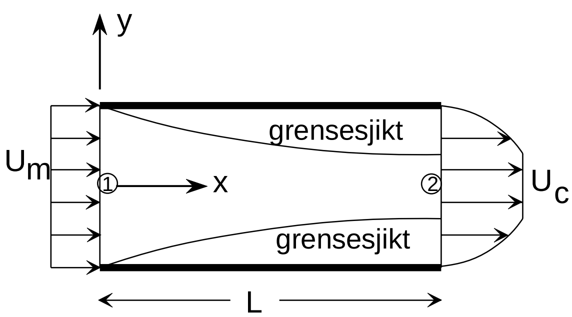
b) Antar at strømningen er turbulent:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{\delta}{0.16}\right)^{7/6}\left(\frac{U\rho}{\mu}\right)^{1/6} = 6.06\ \text{m}$$

Kontrollerer om antagelsen holder:

$$Re_x = \frac{Ux\rho}{\mu} = 8.1\cdot10^6 > Re_{xcrit} \quad \text{Ok!} \quad \underline{\underline{x = 6.06\ \text{m}}}$$

Oppgave 7.7 Bruk fortrengningstykkelsen δ^* og estimèr: a) U_c, b) p_c og c) midlere trykkgradient.



Gitt U_m = 2 m/s og L = 3 m.
Luft 20°C og 1 atm: $\rho = 1.2\ kg/m^3$, $\mu = 1.8\cdot10^{-5}$ kg/ms, $\nu \equiv \mu/\rho$.

Laminær fortrengningstykkelse:

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{Re_x^{1/2}}, \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu}$$

Med U_m = 2 m/s og x = 3 m får vi δ^* = 0.0082 m.

a) Massebevarelse: $U_m A_{inn} = U_c A_{ut}$. A_{inn} = (0.40 m)^2, mens for A_{ut} brukes nå kun senter-området der U_c er konstant:

$$A_{ut} = (0.40\,\mathrm{m} - 2\delta^*)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{U_c = U_m \frac{A_{inn}}{A_{ut}} = 2.174\,\mathrm{m/s}}}$$

b) Grensesjiktet har ikke vokst sammen ved utløpet slik at strømningen i senter-området kan regnes friksjonsfritt, og vi kan bruke Bernoulli's likning fra 1 til 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \quad \text{der} \quad z_1 = z_2,\ v_1 = U_m,\ v_2 = U_c$$

$$\Rightarrow \quad p_2 = \underline{\underline{p_c}} = \frac{1}{2}\rho(U_m^2 - U_c^2) + p_1 = \underline{\underline{p_1 - 0.44\,\mathrm{Pa}}}$$

Midlere trykkgradient:

$$\underline{\underline{\frac{\Delta p}{x}}} = \frac{p_2 - p_1}{x} = -\frac{0.44\,\mathrm{Pa}}{3.0\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{-0.15\,\mathrm{Pa/m}}}$$

<u>Oppgave 7.9</u> Gjennomfør grensesjikt-analysen i kap. 7.2 på nytt, bruker antagelsen om et <u>lineært</u> hastignetsprofil: $u/U \approx y/\delta$. Beregn c_f, θ/x, δ^*/x og H.

Starter med å beregne skjærspenningen på veggen fra hastighetsprofilet $u = Uy/\delta$:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\mu \frac{U}{\delta}}$$

Fra kontrollvolum-analysen (kraftbalanse) har vi følgende likning for vegg-skjærspenningen (likn. 7.5):

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad \text{der} \quad \theta \equiv \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \int_0^\delta \frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)dy = \underline{\frac{\delta}{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx}$$

Setter uttrykkene for vegg-skjærspenningen lik hverandre, og får en diff-likning for grensesjikt-tykkelsen δ:

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad \Rightarrow \quad \delta\, d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{6\nu}{U} x$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12\nu}{Ux}} = \frac{3.46}{Re_x^{1/2}}}}$$

Fra definisjonen for friksjonsfaktoren c_f (likn. 7.10):

$$c_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\mu \frac{U}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\nu}{\delta U} = \frac{2\nu}{U} \cdot \frac{1}{x}\sqrt{\frac{Ux}{12\nu}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}\,Re_x^{1/2}}}}$$

Impulstykkelsen:

$$\theta = \frac{\delta}{6} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\theta}{x}}} = \frac{1}{6}\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12}{36}} \frac{1}{Re_x^{1/2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}\,Re_x^{1/2}}}}$$

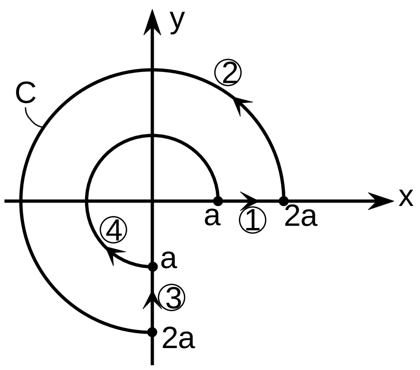
Fortrengningstykkelsen (likn. 7.12):

$$\delta^* \equiv \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{\delta}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\delta^*}{x}}} = \frac{\delta}{2x} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{Re_x^{1/2}}}}$$

Formfaktor:

$$H \equiv \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\delta^*/x}{\theta/x} = \frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \underline{\underline{= 3}}$$

<u>Oppgave 8.12</u> Gitt en potensialhvirvel med styrke K i origo. Bestem sirkulasjonen Γ langs kurven C.



(I oppgaven står det at vi skal gå <u>med</u> klokka, men her har vi gått <u>mot</u> klokka i overensstemmelse med definisjonen av Γ. Svaret blir imidlertid det samme.)

Sirkulasjonen er definert som:

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

En potensialvirvel har hastighetskomponentene:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{K}{r}$$

Deler da linjeintegralet opp i de 4 delene som vist i figuren:

$$\Gamma = \int_1 v_r dr + \int_2 v_\theta r d\theta + \int_3 v_r dr + \int_4 v_\theta r d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{3\pi/2} \frac{K}{2a} 2a d\theta + 0 + \int_{3\pi/2}^{0} \frac{K}{a} a d\theta = 0$$

$\underline{\underline{\Gamma = 0}}$ fordi vi har gått utenom origo der $\nabla \times \vec{v} = \infty$.